H. STEPHANI

# ALLGEMEINE RELATIVITÄTS THEORIE

H. STEPHANI

# ALLGEMEINE RELATIVITÄTS THEORIE

H. STEPHANI

# ALLGEMEINE RELATIVITÄTS THEORIE

H. Stephani

# Allgemeine Relativitätstheorie

Hochschulbücher für Physik

Herausgegeben von Robert Rompe und Ernst Schmutzer

Band 43

# Allgemeine Relativitätstheorie

## Eine Einführung
## in die Theorie des Gravitationsfeldes

von Hans Stephani

3., neubearbeitete Auflage

Mit 54 Abbildungen

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1988

ISBN 3-326-00083-9

Verlagslektor: Karin Bratz
Verlagshersteller: Birgit Burkhardt
Gestalter für Einband und Schutzumschlag: H. Hoeftmann

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/82/87
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 7400 Altenburg
LSV 1114
Bestellnummer: 570 501 2
04400

# Vorwort

Dieses Buch soll eine Einführung in die Grundlagen der Einsteinschen Theorie geben und einen Überblick über ihre Fragestellungen, Begriffe und Methoden vermitteln. Bei der stürmischen Entwicklung der relativistischen Physik in den letzten Jahren war eine Beschränkung und Auswahl des Stoffes unumgänglich; durch die jedem Kapitel beigefügten Literaturhinweise wurde jedoch versucht, die Lücke bis zur modernen Forschung möglichst weitgehend zu schließen. Einige etwas anspruchsvollere Abschnitte, die man beim ersten Lesen auslassen kann, wurden mit einem Stern gekennzeichnet. Beim Leser wird die Kenntnis der theoretischen Mechanik, der Elektrodynamik und der Speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt. Die für die Allgemeine Relativitätstheorie benötigten Grundbegriffe der Riemannschen Geometrie werden in den ersten Kapiteln dargestellt.

Mein Dank gilt allen Kollegen der von Prof. Schmutzer geleiteten Jenaer Arbeitsgruppe, mit denen und von denen ich die Relativitätstheorie lernte, und allen namentlich erwähnten oder auch ungenannten Autoren von Büchern und Zeitschriftenartikeln, deren Ideen dieses Buch enthält. Besonders verpflichtet bin ich meinen Kollegen Dr. G. Kluge und Dr. D. Kramer für zahlreiche kritische Hinweise zur Gestaltung des Manuskripts sowie Prof. Dr. E. Schmutzer und Dr. F. Gehlhar für Abänderungsvorschläge. Weiterhin habe ich zu danken Frau U. Kaschlik für das sorgfältige Schreiben des Manuskripts, Herrn Th. Elster für Hilfe bei den Korrekturen und nicht zuletzt dem Verlag für die angenehme Zusammenarbeit. Bei der Vorbereitung der 3. Auflage wurden auch die Ergänzungen zur Literatur benutzt, die Dr. J. Stewart für die englische Ausgabe zusammenstellte.

Jena 1985 HANS STEPHANI

# Inhaltsverzeichnis

## Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie

## Linearisierte Gravitationstheorie, Fernfelder und Gravitationswellen



## Invariante Charakterisierung strenger Lösungen

## Gravitationskollaps und Schwarze Löcher



## Kosmologie

# Einführung

Historisch entstand die Allgemeine Relativitätstheorie als Weiterführung der Speziellen Relativitätstheorie. Ihr Name beschreibt aber nur sehr unvollständig die Fragestellungen, die in ihr untersucht werden. Wie in jeder lebendigen, sich entwickelnden Wissenschaft besteht auch in ihr keine Übereinstimmung unter den Wissenschaftlern darüber, welche der im Entstehungsprozeß der Theorie diskutierten Gesichtspunkte und Ideen besonders wichtig waren, für einen logischen Aufbau unbedingt erforderlich sind oder sich für die zukünftige Entwicklung als fruchtbar erweisen werden. Drei Fragenkomplexe spielten jedoch eine besondere Rolle und führten schließlich zur Allgemeinen Relativitätstheorie.

1. Zur Beschreibung der Natur und ihrer Gesetze sollte man *beliebige Koordinatensysteme* benutzen können, und entsprechend dem *Kovarianzprinzip* sollte die Form der Naturgesetze nicht wesentlich von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Diese zunächst rein mathematische Forderung erhält ein physikalisches Gewand durch die Ersetzung von „beliebiges Koordinatensystem“ durch „beliebig bewegter Beobachter“. Die Naturgesetze sollten vom Bewegungszustand des Beobachters unabhängig sein, ähnlich wie sie in der Speziellen Relativitätstheorie für alle Inertialsysteme, d. h. für alle mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegten Beobachter, gleich sind. Zu diesem Komplex gehört auch die insbesondere von Ernst Mach aufgeworfene Frage, ob sich eine absolute Beschleunigung (einschließlich einer absoluten Rotation) überhaupt sinnvoll definieren läßt, oder ob nicht jede feststellbare Rotation eine Rotation gegenüber dem Fixsternhimmel bedeutet (*Machsches Prinzip*).

2. Die Newtonsche Gravitationstheorie entspricht nicht dem speziellen Relativitätsprinzip, Gravitationswirkungen breiten sich in ihr mit unendlich großer Geschwindigkeit aus. Es war deshalb eine neue, bessere Formulierung der *Feldgleichungen des Gravitationsfeldes* zu finden, die auch den Einfluß der Gravitation auf andere physikalische Vorgänge umfaßt und die mit der Erfahrung übereinstimmt.

3. In der Astrophysik und der *Kosmologie* spielen große Massen eine Rolle, neben den kurzreichweitigen Kernkräften dominieren Gravitationskräfte. Es war deshalb eine Gravitationstheorie zu finden, die das dynamische Verhalten des ganzen Kosmos richtig widerspiegelt und gleichzeitig für die Sternentwicklung gültig ist.

Am Beginn der Geschichte der Allgemeinen Relativitätstheorie steht die Formulierung der Grundgleichungen durch Albert Einstein im Jahre 1915, gefolgt von einer Reihe von Arbeiten zu den Grundlagen der Theorie und zu möglichen experimentellen Bestätigungen. Trotz der Erfolge der Theorie (Periheldrehung des Merkurs, Lichtablenkung an der Sonne, Deutung der kosmologischen Rotverschiebung)

behielt sie — wohl wegen der mathematischen Schwierigkeiten, der neuartigen Begriffe und der z. B. im Verhältnis zur etwa gleichzeitig entstehenden Quantentheorie geringen Anwendungsmöglichkeiten — lange Zeit den Ruf einer esoterischen Wissenschaft für Spezialisten und Außenseiter. Durch die Ausarbeitung neuer Methoden zur Gewinnung von Lösungen und zur physikalischen Interpretation der Theorie und noch mehr durch die überraschenden Entdeckungen der Astrophysik (Pulsare, kosmische Hintergrundstrahlung) und die verbesserten Nachweismöglichkeiten allgemeinrelativistischer Effekte wurde die Allgemeine Relativitätstheorie in den letzten 30 Jahren jedoch endgültig zu einer eigentlich physikalischen Wissenschaft mit vielen experimentellen Fragestellungen und beobachtbaren Konsequenzen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist die Theorie des Gravitationsfeldes; die Darstellung ihrer Sprache und Begriffe, ihrer Methoden und Ergebnisse bildet den Hauptinhalt dieses Buches.

Die moderne theoretische Physik benutzt und benötigt immer kompliziertere mathematische Hilfsmittel — diese Feststellung mit ihren für den Physiker oft unerfreulichen Konsequenzen trifft auch auf die Gravitationstheorie zu. Die Sprache der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Differentialgeometrie, und wir müssen sie lernen, wenn wir physikalische Fragen präzise stellen und beantworten wollen. Dieses Buch beginnt deshalb mit sieben Kapiteln, in denen die unbedingt benötigten Begriffe und Formeln der Riemannschen Geometrie dargestellt werden. Dabei wird der Indexschreibweise der Vorzug gegeben, um das Buch für Nichtmathematiker leichter lesbar zu machen. Soweit möglich, werden mathematische Ableitungen physikalisch motiviert.

# 1. Die kräftefreie Bewegung von Massenpunkten in der Newtonschen Mechanik

## 1.1. Koordinatensysteme

Üblicherweise lernt man in der theoretischen Mechanik nur wenige einfache Koordinatensysteme kennen, in denen man die Bewegung eines Massenpunktes beschreibt. Für die Zwecke der Mechanik kennzeichnet man die Koordinatensysteme am besten durch die Angabe des Zusammenhanges zwischen dem infinitesimalen Abstand $\mathrm{d}s$ zweier Punkte und der Differenz ihrer Koordinaten. Bei der Beschreibung der Bewegung im dreidimensionalen Raum bevorzugt man kartesische Koordinaten $x$, $y$, $z$ mit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{1,1}$$

Zylinderkoordinaten $\varrho$, $\varphi$, $z$ mit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1,2}$$

oder Kugelkoordinaten $r$, $\vartheta$, $\varphi$ mit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1,3}$$

Ist die Bewegung auf eine zeitlich unveränderliche Fläche, z. B. eine Kugel, beschränkt, wird man den entsprechenden zweidimensionalen Ausschnitt ($\mathrm{d}r = 0$) der Kugelkoordinaten benutzen:

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1,4}$$

Auch für beliebige andere Koordinatensysteme ist $\mathrm{d}s^2$ eine quadratische Funktion der Koordinatendifferentiale:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}(x^\nu)\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta; \qquad \alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3. \tag{1,5}$$

Über doppelt auftretende Indizes wird hier und in allen folgenden Formeln summiert, und zwar von 1 bis 3 für einen Massenpunkt im dreidimensionalen Raum und von 1 bis 2 für einen Massenpunkt auf einer Fläche.

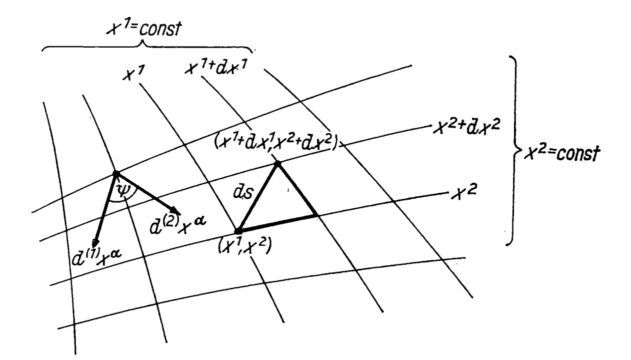



Abb. 1.1
Längen- und Winkelmessung mit Hilfe des metrischen Tensors

Die Form (1,5) heißt *metrische Fundamentalform*, die ortsabhängigen Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ bilden die Komponenten des *metrischen Tensors*. Er ist symmetrisch: $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Der Name metrischer Tensor weist darauf hin, daß mit seiner Hilfe die für geometrische Messungen fundamentalen Größen Länge und Winkel berechnet bzw. definiert werden können: Der Abstand $\mathrm{d}s$ zweier Punkte mit den Koordinaten $(x^1, x^2)$ bzw. $(x^1 + \mathrm{d}x^1, x^2 + \mathrm{d}x^2)$ wird durch (1,5) gegeben, und der Winkel $\psi$ zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden infinitesimalen Vektoren $\mathrm{d}^{(1)}x^\alpha$ und $\mathrm{d}^{(2)}x^\alpha$ kann aus

$$\cos\psi = \frac{g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^{(1)}x^\alpha\,\mathrm{d}^{(2)}x^\beta}{\sqrt{g_{\varrho\sigma}\,\mathrm{d}^{(1)}x^\varrho\,\mathrm{d}^{(1)}x^\sigma}\cdot\sqrt{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^{(2)}x^\mu\,\mathrm{d}^{(2)}x^\nu}} \tag{1,6}$$

berechnet werden. Formel (1,6) ist nichts anderes als die Übertragung der bekannten Vektorbeziehung $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ auf infinitesimale Vektoren.

Ist die Matrix des metrischen Tensors diagonal, also $g_{\alpha\beta}$ nur für $\alpha = \beta$ von Null verschieden, nennt man das Koordinatensystem orthogonal. Wie (1,6) zeigt, stehen dann die Koordinatenlinien $x^\alpha = \text{const}$ senkrecht aufeinander.

Zu der Matrix $g_{\alpha\beta}$ existiert, falls ihre Determinante von Null verschieden ist, eine inverse Matrix $g^{\beta\mu}$:

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\mu} = \delta_\alpha^\mu = g_\alpha^\mu. \tag{1,7}$$

Die unmittelbare Bedeutung der metrischen Fundamentalform (1,5) für die Mechanik beruht auf ihrem einfachen Zusammenhang

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \tag{1,8}$$

mit dem Quadrat der Geschwindigkeit des Massenpunktes, das wir für die Konstruktion der kinetischen Energie als eines Teils der Lagrange-Funktion brauchen.

## 1.2. Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen gewinnen wir am schnellsten aus der Lagrange-Funktion $L$, die für die kräftefreie Bewegung mit der kinetischen Energie des Massenpunktes übereinstimmt:

$$L = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \tag{1,9}$$

Die zugehörigen Lagrange-Gleichungen II. Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0 \tag{1,10}$$

lassen sich einfach aufstellen. Verwenden wir als Abkürzung für die partielle Ableitung nach den Koordinaten die symbolische Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\ldots) = (\ldots)_{,\nu}, \tag{1,11}$$

dann gilt

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\nu} = m g_{\alpha\nu}\dot{x}^\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = L_{,\nu} = \frac{m}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \tag{1,12}$$

und aus (1,10) wird zunächst

$$g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\nu,\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{1,13}$$

Schreiben wir in dieser Gleichung den zweiten Term in der Form

$$g_{\alpha\nu,\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \tag{1,14}$$

multiplizieren (1,13) dann mit $g^{\nu\mu}$ und summieren über $\nu$, erhalten wir wegen (1,7)

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \tag{1,15}$$

mit der Abkürzung

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \tag{1,16}$$

Die Gln. (1,15) sind die gesuchten Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes. Bei ihrer Ableitung sind wir auf die durch (1,16) definierten *Christoffel*-Symbole $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ gestoßen, die in der Differentialgeometrie eine große Rolle spielen. Wegen ihrer aus

(1,16) ablesbaren Symmetrie

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \tag{1,17}$$

gibt es im dreidimensionalen Raum 18, für zweidimensionale Flächen 6 verschiedene Christoffel-Symbole.

Beim Betrachten der Gln. (1,15) und (1,16) könnte man vermuten, über die Christoffel-Symbole einen besonders einfachen Weg zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen gefunden zu haben. Diese Vermutung ist jedoch falsch; man benutzt umgekehrt gerade die Bewegungsgleichungen, um sich die Christoffel-Symbole zu verschaffen. Wir wollen diese Methode an einem Beispiel veranschaulichen. In Kugelkoordinaten (1,3), $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, folgen aus der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) \tag{1,18}$$

die Lagrange-Gleichungen II. Art

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0,\\ &\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0,\\ &\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta} = 0. \end{aligned} \tag{1,19}$$

Ein Vergleich mit (1,15) zeigt (man beachte, daß wegen der Symmetriebezeichung (1,17) in den Geschwindigkeiten $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ gemischte Terme stets zweimal auftreten!), daß nur die Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{22} = -r, &&\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta,\\ &\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, &&\Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,\\ &\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, &&\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta \end{aligned} \tag{1,20}$$

von Null verschieden sind.

Im Fall der freien Bewegung eines Massenpunktes im dreidimensionalen Raum ist der physikalische Inhalt der Bewegungsgleichungen natürlich etwas dürftig: Es handelt sich nur um eine komplizierte Schreibweise des Trägheitsgesetzes; wir wissen von vornherein, daß sich der Massenpunkt kräftefrei auf einer Geraden bewegt. Im zweidimensionalen Fall, bei der Bewegung auf einer beliebigen Fläche, kann die Bahnkurve des Massenpunktes aber ziemlich kompliziert sein. Wie wir im folgenden Abschnitt zeigen werden, ist jedoch auch dann eine einfache geometrische Deutung der Bewegungsgleichungen (1,15) möglich.

## 1.3. Die Geodätengleichung

Im dreidimensionalen Raum hat die Bahnkurve eines kräftefreien Massenpunktes, die Gerade, die Eigenschaft, die kürzeste Verbindung zweier auf ihr liegender Punkte zu sein. Wir wollen versuchen, diese Beziehung zu verallgemeinern, und fragen

deshalb nach der kürzesten Verbindung zweier Punkte in einem drei- oder zweidimensionalen Raum, also nach derjenigen Kurve, deren Bogenlänge $s$ bei vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt ein Minimum ist:

$$s = \int_{P_A}^{P_E} \mathrm{d}s = \text{Extr.} \tag{1,21}$$

Benutzen wir zur Darstellung der Kurve einen zunächst beliebigen Parameter $\lambda$, der für alle Vergleichskurven in den Punkten $P_E$ und $P_A$ jeweils den gleichen Wert hat, und setzen wir für das Bogenlängendifferential d$s$ den Ausdruck (1,5) ein, dann wird aus (1,21) die Forderung

$$s = \int_{\lambda_A}^{\lambda_E} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_E} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = \text{Extr.}, \tag{1,22}$$

aus der wir die gesuchte kürzeste Verbindungskurve, die Geodäte, in der Form $x^\alpha(\lambda)$ zu bestimmen haben.

Die Variationsaufgabe (1,22) hat genau die mathematische Form des Hamilton-Prinzips mit der Lagrange-Funktion

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta} = \sqrt{F}, \qquad x'^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1,23}$$

und dem Parameter $\lambda$ anstelle der Zeit $t$. Dementsprechend muß die Geodäte die zusammengehörigen Lagrange-Gleichungen II. Art erfüllen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{g_{\alpha\nu}x'^\alpha}{\sqrt{F}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{F}}\,g_{\alpha\beta,\nu}x'^\alpha x'^\beta \\ &= \frac{1}{2F\sqrt{F}}\left[-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}g_{\alpha\nu}x'^\alpha + 2F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(g_{\alpha\nu}x^\alpha) - Fg_{\alpha\beta,\nu}x'^\alpha x'^\beta\right] = 0.\end{aligned} \tag{1,24}$$

Diese Differentialgleichung der Geodäten können wir vereinfachen, indem wir (nur für diese Extremalkurve, nicht für die Vergleichsbahnen) den Parameter $\lambda$ geeignet wählen: Wir fordern Proportionalität zwischen $\lambda$ und der Bogenlänge $s$. Dies hat wegen (1,22) und (1,23) $F = \text{const}$ zur Folge, und aus (1,24) erhalten wir die Differentialgleichung der Geodäten

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{1,25}$$

Diese Differentialgleichung hat nicht nur die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung (1,15), sie ist ihr auch vollständig äquivalent, da ja bei einer kräftefreien Bewegung wegen des Energieerhaltungssatzes der Betrag $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ der Geschwindigkeit konstant ist und somit die Zeit $t$ einer der in (1,25) erlaubten, zur Bogenlänge $s$ proportionalen Parameter $\lambda$ ist.

Wählen wir als Parameter $\lambda$ jetzt die Bogenlänge $s$ selbst, können wir unser Ergebnis in folgendem Satz zusammenfassen:
*Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich auf einer Geodäten*

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{1,26}$$

*des dreidimensionalen Raumes oder der Fläche, an die er gebunden ist.* Seine Bahn ist also immer die kürzeste Verbindung zweier auf ihr liegender Punkte; für die Kugelfläche ergeben sich z. B. Großkreise als Bahnkurven.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden wir auf das Problem stoßen, die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes in einem beliebigen Gravitationsfeld aufzustellen. Es wird sich zeigen, daß die soeben abgeleitete Formulierung der Bewegungsgleichung der kräftefreien Bewegung ein guter Ausgangspunkt zur Lösung dieser Aufgabe ist.

## 1.4. Die geodätische Abweichung

Wir wollen uns in diesem Abschnitt einer Frage zuwenden, zu deren Beantwortung wir eigentlich schon die Hilfsmittel der Riemannschen Geometrie brauchen und auch benutzen werden. Der Leser wird deshalb um Nachsicht gebeten, wenn einige Formulierungen etwas verschwommen wirken und Rechenoperationen nicht genügend begründet werden. Es empfiehlt sich, diesen Abschnitt nach Kenntnis des Kapitels 5. noch einmal anzusehen.

Wenn die Fläche, an die der Massenpunkt gebunden ist, eine Ebene ist oder eine Fläche, die durch Verbiegung aus einer Ebene oder einem Ebenenstück hervorgegangen ist (z. B. Zylinder, Kegel), sind die Geodäten Geraden dieser Ebene, und die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes sind sehr einfach zu integrieren. Bei Verwendung ungeeigneter Koordinaten kann die Geodätengleichung (1,26) aber ziemlich kompliziert sein. Wie kann man in einem solchen Fall der Bewegungsgleichung, d. h. den Christoffel-Symbolen $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ ansehen, daß es sich um die Bewegung auf einer Ebene handelt?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir eine Schar $x^\alpha(s, p)$ von Geodäten auf einer Fläche; dabei ist $p$ der Scharparameter, der die verschiedenen Geodäten kennzeichnet, und die Bogenlänge $s$ der Kurvenparameter, der die verschiedenen Punkte der gleichen Geodäte erfaßt.

Eine Geradenschar in der Ebene ist nun dadurch ausgezeichnet, daß der Abstand zweier benachbarter Geodäten, gemessen zwischen Punkten des gleichen Parameterwertes $s$, eine *lineare* Funktion der Bogenlänge $s$ ist. Dies weist uns darauf hin, auch im allgemeineren Fall von Geodäten auf einer beliebigen Fläche das Verhalten des Abstandes benachbarter Geodäten zu untersuchen und aus ihm Schlüsse auf die Eigenschaften der Fläche zu ziehen.

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial s} = t^\alpha, \qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial p} = V^\alpha, \qquad \frac{\partial t^\alpha}{\partial p} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial s}. \tag{1,27}$$

Der Tangenteneinheitsvektor $t^\alpha$ zeigt in Richtung der Geschwindigkeit, $V^\alpha dp$ ist gerade der Abstandsvektor zweier benachbarter Geodäten. Um zu sehen, ob es sich

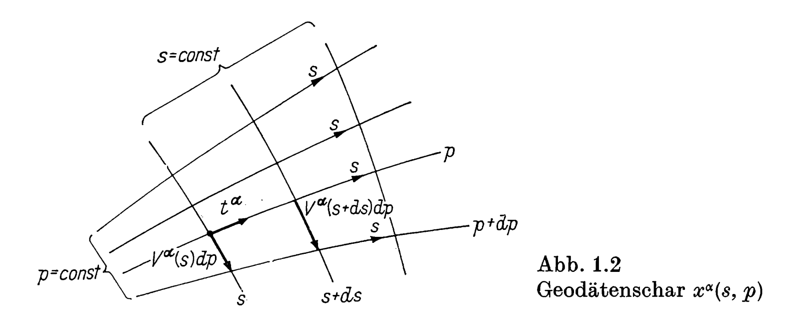



Abb. 1.2
Geodätenschar $x^\alpha(s, p)$

bei der Fläche um eine Ebene handelt oder nicht, dürfen wir jedoch nicht einfach $\partial^2 V^\alpha/\partial s^2$ bilden. Schon bei der Geraden in der Ebene wird ja die Tatsache, daß der Tangentenvektor $t^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ konstant, d. h. unabhängig von $s$, ist, in einem beliebigen Koordinatensystem nicht durch $\mathrm{d}t^\mu/\mathrm{d}s = 0$ zum Ausdruck gebracht, sondern — wie ein Blick auf die Geodätengleichung (1,26) zeigt — durch

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\, t^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}t^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} t^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0\,. \tag{1,28}$$

Wir fassen Gl. (1,28) als Definitionsgleichung des Operators $\mathrm{D}/\mathrm{D}s$ auf, gültig für jeden Parameter $s$ und anwendbar auf jeden Vektor $t^\mu$. Bilden wir nach dieser Vorschrift die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}p}\, t^\alpha &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s\, \partial p} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} t^\mu V^\nu, \\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\, V^\alpha &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s\, \partial p} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} V^\mu t^\nu, \end{aligned} \tag{1,29}$$

können wir sofort die der Gl. (1,27) analoge Beziehung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}p}\, t^\alpha = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\, V^\alpha \tag{1,30}$$

ablesen.

Wir werden jetzt die Größe

$$\frac{\mathrm{D}^2 V^\alpha}{\mathrm{D}s^2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}p}\, t^\alpha\right) \tag{1,31}$$

berechnen, um mit ihrer Hilfe das Verhalten des Abstands zweier benachbarter Geodäten zu diskutieren. Unser erstes Ziel ist, die rechte Seite durch die Christoffel-Symbole auszudrücken. Einsetzen der Definitionsgleichung (1,28) gibt uns sofort

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}^2 V^\alpha}{\mathrm{D}s^2} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\left(\frac{\partial t^\alpha}{\partial p} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} t^\mu V^\nu\right) \\ &= \frac{\partial^2 t^\alpha}{\partial s\, \partial p} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} t^\beta t^\mu V^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(\frac{\partial t^\mu}{\partial s}\, V^\nu + t^\mu \frac{\partial V^\nu}{\partial s}\right) \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\varrho\tau}\left(\frac{\partial t^\varrho}{\partial p} + \Gamma^\varrho_{\mu\nu} t^\mu V^\nu\right) t^\tau\,. \end{aligned} \tag{1,32}$$

Diese Gleichung können wir vereinfachen, indem wir die aus der Geodätengleichung (1,28) folgende Beziehung

$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}p}\frac{\mathrm{D}t^\alpha}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}p}\left(\frac{\partial t^\alpha}{\partial s} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} t^\mu t^\nu\right)$$

auflösen:

$$\frac{\partial^2 t^\alpha}{\partial s\,\partial p} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} V^\beta t^\mu t^\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(\frac{\partial t^\mu}{\partial p} t^\nu + \frac{\partial t^\nu}{\partial p} t^\mu\right)$$
$$-\Gamma^\alpha_{\varrho\tau}\left(\frac{\partial t^\varrho}{\partial s} + \Gamma^\varrho_{\mu\nu} t^\mu t^\nu\right) V^\tau,$$

und das Ergebnis in (1,32) einsetzen. Unter Beachtung von (1,27) und (1,17) erhalten wir

$$\frac{\mathrm{D}^2 V^\alpha}{\mathrm{D}s^2} = t^\beta t^\mu V^\nu (\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\varrho\beta}\Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\varrho\nu}\Gamma^\varrho_{\mu\beta}). \tag{1,33}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt uns ein Maß für die Abstandsänderung benachbarter Geodäten oder, in der Sprache der Mechanik, der Relativbeschleunigung zweier auf benachbarten Bahnen fliegender Massenpunkte gegeneinander ($V^\alpha \mathrm{d}p$ ist ihr Abstand, $\mathrm{d}s$ ist proportional zu $\mathrm{d}t$ bei kräftefreier Bewegung). Sie wird auch *geodätische Abweichung* genannt.

Falls die Geodäten Geraden in einer Ebene sind, sollte die rechte Seite verschwinden; sie ist also — geometrisch gesprochen — auch ein Maß für die Krümmung der Fläche, für das Abweichen der Fläche von der Ebene. Diese anschauliche Begründung macht den Namen „Krümmungstensor" für den durch

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\varrho\beta}\Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\varrho\nu}\Gamma^\varrho_{\mu\beta} \tag{1,34}$$

definierten Ausdruck $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ verständlich. Man kann ihn rechnerisch aus den Christoffel-Symbolen oder durch Messung der Abstandsänderung benachbarter Bahnkurven bestimmen. Verschwindet er, so ist die Fläche eine Ebene, und die Bahnkurven sind Geraden.

Zur Illustration berechnen wir den Krümmungstensor der Kugelfläche

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) = K^2[(\mathrm{d}x^1)^2 + \sin^2 x^1 (\mathrm{d}x^2)^2] = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta. \tag{1,35}$$

Die einzigen nichtverschwindenden Christoffel-Symbole sind

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\vartheta, \tag{1,36}$$

und aus ihnen erhalten wir nach einer einfachen Rechnung die Komponenten

$$\begin{aligned} R^1{}_{221} &= -R^1{}_{212} = -\sin^2\vartheta = -\frac{1}{K^2}\,g_{22},\\ R^2{}_{121} &= -R^2{}_{112} = 1 = \frac{1}{K^2}\,g_{11},\\ R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} &= 0 \qquad \text{sonst} \end{aligned} \tag{1,37}$$

des Krümmungstensors. Dieses Ergebnis läßt sich in der Formel

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{K^2} (\delta^{\alpha}_{\beta} g_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu} g_{\mu\beta}) \tag{1,38}$$

zusammenfassen. Sie bringt zum Ausdruck, daß der Krümmungstensor außer von der koordinatensystemabhängigen Metrik nur noch vom Kugelradius $K$ abhängt. Für $K \to \infty$ verschwindet der Krümmungstensor.

Man kann zeigen, daß der Krümmungstensor einer beliebigen zweidimensionalen Fläche immer die Gestalt (1,38) hat, allerdings dann mit ortsabhängigem $K$.

# Grundlagen der Riemannschen Geometrie

## 2. Warum überhaupt Riemannsche Geometrie?

Es ist eine der wichtigsten Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie, daß physikalische Grundgesetze am einfachsten darstellbar sind, wenn man sie nicht im dreidimensionalen Raum, sondern in der vierdimensionalen Raum-Zeit

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2,$$

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad a, b = 1, \ldots, 4, \tag{2,1}$$

formuliert. Wir wollen jetzt plausibel machen, daß es sinnvoll ist, diesen Minkowski-Raum durch eine noch kompliziertere mathematische Raum-Zeit-Struktur zu ersetzen.

Betrachten wir eine in einem Inertialsystem ruhende Kreisscheibe vom Standpunkt eines um die Scheibenachse rotierenden Koordinatensystems aus und versuchen, die geometrischen Eigenschaften der Scheibe mit Hilfe von Maßstäben auszumessen, so wäre folgendes Ergebnis plausibel: In radialer Richtung gelegte Maßstäbe werden von der Rotation der Scheibe nicht beeinflußt, der Kreisradius ist unverändert; an die Kreisperipherie gelegte Maßstäbe werden durch die Lorentz-Kontraktion verkürzt, der Kreisumfang wird verkleinert. Der rotierende Beobachter stellt also fest, daß das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser kleiner als $\pi$ ist; er findet geometrische Verhältnisse wie auf der gekrümmten Fläche einer Kugel. Natürlich sind das Anwenden der Lorentz-Transformationen auf rotierende (beschleunigte!) Systeme und die in der Meßvorschrift implizit benutzte Definition der Gleichzeitigkeit anfechtbar. Aber das würde auch nur das Ergebnis unseres Gedankenversuches stützen, daß beim Übergang zu beliebig bewegten Beobachtern (Koordinatensystemen) wesentliche Änderungen der Struktur der Metrik (des Verhaltens von Maßstäben und Uhren) auftreten können.

Physikalisch noch bedeutungsvoller ist der Hinweis, den uns die Untersuchung der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes gibt, der sich in einem Schwerefeld $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t)$ bewegt. Beschreiben wir diese Bewegung in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Nullpunkt sich mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ gegen ein Inertialsystem bewegt und das mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotiert, so gilt bekanntlich

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}. \tag{2,2}$$

Alle Terme dieser Bewegungsgleichung haben die Masse $m$ als Vorfaktor. Vom Standpunkt der Newtonschen Mechanik haben diese Faktoren jedoch unterschiedliche physikalische Bedeutung: Die Kraft $m\boldsymbol{g}$, die im Schwerefeld auf einen Körper wirkt, ist proportional zur schweren Masse $m_S$, während alle anderen Terme in (2,2) ein Ausdruck des (gegenüber allen Arten von Kräften gleichen) Trägheitsverhaltens des Körpers sind und demzufolge die träge Masse $m_T$ enthalten. Es war eine der wichtigsten Erkenntnisse der Mechanik, daß für alle Körper diese beiden Parameter gleich sind, alle Körper gleich schnell fallen, also

$$m_S = m_T = m \tag{2,3}$$

gilt. Die zahlenmäßige Identität von träger und schwerer Masse (zur Zeit genauester Wert: $(m_S - m_T)/2(m_S + m_T) \leq 10^{-12}$, Braginski 1972) deutet aber auch auf eine Wesensgleichheit hin; in der Sprache der Gl. (2,2): Die Schwerkraft ist möglicherweise genauso eine Scheinkraft wie die Coriolis-Kraft oder die Zentrifugalkraft. Man könnte also vermuten, daß sich der Massenpunkt in Wirklichkeit schwerefrei bewegt, daß sich auch die Schwerkraft durch geeignete Wahl des Koordinatensystems beseitigen läßt.

Wie eine genauere Überlegung zeigt, läßt sich lokal, d. h. in Raumgebieten, in denen das Schwerefeld als homogen angesehen werden kann, die Schwerkraft wirklich wegtransformieren: Im Inneren eines Erdsatelliten oder eines fallenden Kastens bewegen sich für den mitbewegten Beobachter die Körper kräftefrei. Global ist dies jedoch durch eine einfache Koordinatentransformation (durch Übergang zu einem bewegten Beobachter) nicht erreichbar: Es gibt kein kartesisches Koordinatensystem, in dem sich zwei weit voneinander entfernte Satelliten gleichzeitig kräftefrei bewegen.

Wenn wir also daran festhalten wollen, daß sich der Massenpunkt trotz des vorhandenen Gravitationsfeldes kräftefrei bewegt, und im Sinne des Kapitels 1. „kräftefrei" durch „auf einer Geodäten" übersetzen, müssen wir die Geometrie des Raumes ändern. So wie die Geodäten auf einer Fläche nur dann keine Geraden sind, wenn die Fläche gekrümmt ist und der durch (1,33) oder (1,34) definierte Krümmungstensor nicht verschwindet, können die Planetenbahnen nur dann Geodäten des Raumes sein, wenn dieser Raum gekrümmt ist.

In der Tat erweist sich diese Einsteinsche Idee, die Schwerkraft als Eigenschaft des Raumes aufzufassen und sie damit zu geometrisieren, als außerordentlich fruchtbar. Wir werden deshalb die Eigenschaften solcher gekrümmten Räume in den folgenden Kapiteln ausführlich darstellen.

# 3. Der Riemannsche Raum

## 3.1. Die Metrik

Der geometrische Hintergrund der Speziellen Relativitätstheorie ist der pseudoeuklidische Raum (2,1) mit einer zeitartigen und drei raumartigen Koordinaten. Auch bei der jetzt durchzuführenden Verallgemeinerung werden wir von einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ausgehen, d. h., wir werden annehmen, daß sich jeder Punkt (einschließlich einer kleinen endlichen Umgebung) eindeutig durch Angabe von

4 Koordinaten $x^n$ fixieren läßt. Dabei kann es durchaus vorkommen, daß es nicht möglich ist, die ganze Raum-Zeit durch ein einziges Koordinatensystem zu erfassen. Um in dieser Mannigfaltigkeit Physik treiben zu können, müssen wir die räumlichen bzw. zeitlichen Abstände benachbarter Punkte messen können. In Verallgemeinerung von (2,1) und (1,5) führen wir deshalb die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = g_{nm}(x^i)\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}x^m \tag{3,1}$$

ein (Summation über doppelt vorkommende lateinische Indizes von 1 bis 4). Diese *metrische Fundamentalform* gibt an, wie man im Kleinen (in der infinitesimalen Umgebung eines Punktes) den Abstand d$s$ der Punkte $(x^n)$ und $(x^n + \mathrm{d}x^n)$ und den Winkel zwischen zwei Richtungen $\mathrm{d}x^n$ und $\mathrm{d}\bar{x}^n$ mißt:

$$\cos(\mathrm{d}x^n, \mathrm{d}\bar{x}^m) = \frac{g_{nm}\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}\bar{x}^m}{\sqrt{\mathrm{d}s^2\,\mathrm{d}\bar{s}^2}} \tag{3,2}$$

(vgl. auch Abb. 1.1). Der *metrische Tensor* (die Metrik) $g_{nm}$ kennzeichnet den Raum (lokal) vollständig. Er ist symmetrisch, seine Determinante $g$ ist im allgemeinen von Null verschieden und besitzt dann ein Inverses $g^{in}$:

$$g_{mn} = g_{nm}, \qquad |g_{nm}| = g \neq 0, \qquad g^{in}g_{nm} = \delta^i_m = g^i_m\,. \tag{3,3}$$

Ein Raum mit den Eigenschaften (3,1) und (3,3) ist demnach eine Verallgemeinerung sowohl der zweidimensionalen Flächen wie auch des vierdimensionalen ungekrümmten (flachen) Minkowski-Raumes. Wenn d$s^2$ positiv definiert ist, d. h. Null nur für $\mathrm{d}x^i = 0$ und positiv sonst (und wenn die Parallelverschiebung eines Vektors so wie in Kapitel 5. definiert wird), handelt es sich um einen *Riemannschen Raum* im engeren Sinne. Wie wir aus der Speziellen Relativitätstheorie wissen, muß die physikalische Raum-Zeit aber eine andere Struktur haben: Wir können zwischen zeit- und raumartigen Abständen, zwischen Uhren und Maßstäben unterscheiden, und es gibt Lichtkegel mit d$s = 0$. Unser Raum ist also ein *pseudoriemannscher Raum*, d$s^2$ kann positiv (raumartig), negativ (zeitartig) oder Null (lichtartig) sein; seine Metrik nennt man auch Lorentzsche Metrik. Wir werden allerdings meistens auch für ihn den Begriff Riemannscher Raum (im weiteren Sinn) verwenden.

In Abschnitt 3.4. werden wir darstellen, wie man die Forderung der Existenz von drei raumartigen und einer zeitartigen Richtung berücksichtigt.

### 3.2. Geodäten und Christoffel-Symbole

Auf einer zweidimensionalen Fläche konnten wir Geodäten dadurch definieren, daß sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten sein sollten:

$$\int \mathrm{d}s = \mathrm{Extr.} \tag{3,4}$$

In einem pseudoriemannschen Raum, in dem d$s^2$ auch Null oder negativ sein kann, stoßen wir insbesondere bei Kurven mit d$s = 0$ (Nullinien) auf Schwierigkeiten bei der Verwendung von (3,4). Wir gehen deshalb hier von dem Variationsprinzip

$$\int L\,\mathrm{d}\lambda = \int \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\lambda = \int g_{mn}\,\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{Extr.} \tag{3,5}$$

aus, das — wie wir in Abschnitt 1.3. gezeigt haben — für $\mathrm{d}s \neq 0$ zu (3,4) äquivalent ist. Die zu der Lagrange-Funktion $L = (\mathrm{d}s/\mathrm{d}\lambda)^2$ gehörenden Lagrange-Gleichungen II. Art geben uns [vgl. (1.3.)]

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^m_{ab} \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{3,6}$$

als Differentialgleichungen der Geodäten. Es sind 4 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die 4 Funktionen $x^m(\lambda)$, und demzufolge sind Geodäten durch Vorgabe eines Anfangspunktes und der Anfangsrichtung oder des Anfangs- und des Endpunktes (lokal) eindeutig bestimmt. Wenn wir später kurz vom Abstand zweier Punkte sprechen, meinen wir immer die Bogenlänge der sie verbindenden Geodäte. Die in (3,6) vorkommenden Christoffel-Symbole sind natürlich wie in (1,16) durch

$$\Gamma^m_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{mn}(g_{an,b} + g_{bn,a} - g_{ab,n}) \tag{3,7}$$

definiert.

Die Lagrange-Funktion $L = g_{mn}\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n/\mathrm{d}\lambda^2$ ist eine homogene Funktion zweiten Grades in den „Geschwindigkeiten" $\dot{x}^n = \mathrm{d}x^n/\mathrm{d}\lambda$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} \dot{x}^n = 2L. \tag{3,8}$$

Wegen (3,8) und der Lagrange-Gleichungen II. Art gilt

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial L}{\partial x^n} \dot{x}^n + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} \ddot{x}^n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}\right) \dot{x}^n + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} \ddot{x}^n$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} \dot{x}^n\right) = 2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda},$$

also

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \qquad L = g_{nm} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = C = \text{const.} \tag{3,9}$$

Die Konstante $C$ kann positiv, negativ oder Null sein, und wir unterscheiden dementsprechend raumartige, zeitartige und nullartige Geodäten. Zeitartige Geodäten werden uns als Bahnkurven von Massenpunkten, Nullgeodäten als Lichtstrahlen wiederbegegnen. Wegen (3,9) ist der (affine) Parameter $\lambda$ längs einer Geodäten offensichtlich bis auf eine lineare Transformation $\lambda' = a\lambda + b$ eindeutig bestimmt; für zeitartige Kurven werden wir $\lambda$ mit der Eigenzeit $\tau$ identifizieren.

Christoffel-Symbole sind wichtige Größen in der Riemannschen Geometrie; wir wollen deshalb den durch (3,7) gegebenen Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen des metrischen Tensors näher untersuchen. Wegen der Symmetrie $g_{nm} = g_{mn}$ des metrischen Tensors sind auch die Christoffel-Symbole symmetrisch in den unteren Indizes:

$$\Gamma^m_{ab} = \Gamma^m_{ba}. \tag{3,10}$$

Es gibt in 4 Dimensionen $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Komponenten des metrischen Tensors, wegen der zusätzlichen Freiheit des oberen Index also $4 \cdot 10 = 40$ verschiedene Christoffel-Symbole. Diese Zahl stimmt aber mit der Zahl der partiellen

Ableitungen $g_{mn,a}$ des metrischen Tensors überein, und es sollte möglich sein, die partiellen Ableitungen durch die Christoffel-Symbole auszudrücken, also (3,7) aufzulösen. In der Tat gilt wegen (3,3)

$$g_{mi}\Gamma^m_{ab} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ai,b} + g_{bi,a} - g_{ab,i}),$$
$$g_{ma}\Gamma^m_{ib} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ia,b} + g_{ab,i} - g_{ib,a}),$$

und durch Addition beider Gleichungen erhalten wir

$$g_{ia,b} = g_{mi}\Gamma^m_{ab} + g_{ma}\Gamma^m_{ib}. \tag{3,11}$$

Auch die partielle Ableitung der Determinante $g$ des metrischen Tensors läßt sich in einfacher Weise aus den Christoffel-Symbolen berechnen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x^b} = \frac{\partial g}{\partial g_{ia}}\, g_{ia,b}. \tag{3,12}$$

Stellt man sich jetzt die Entwicklung der Determinante $g = |g_{mn}|$ nach der $i$-ten Zeile vor:

$$g = \sum_a g_{ia}G_{ia} \qquad \text{(über } i \text{ nicht summieren!)}$$

und benutzt, daß sich die Elemente $g^{ia}$ der inversen Matrix durch die zugeordneten Unterdeterminanten $G_{ia}$ gemäß

$$gg^{ia} = G_{ia}$$

ausdrücken lassen, dann erhält man

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ia}} = gg^{ia}. \tag{3,13}$$

Berücksichtigt man noch (3,11), so folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x^b} = gg^{ia}g_{ia,b} = g(\Gamma^a_{ab} + \Gamma^i_{ib}) = 2g\Gamma^a_{ab}$$

und hieraus schließlich

$$\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^b} = \frac{1}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial x^b} = \Gamma^a_{ab}. \tag{3,14}$$

Bei dieser Schreibweise haben wir schon berücksichtigt, daß $g$ negativ ist (vgl. Abschnitt 4.2.).

## 3.3. Koordinatentransformationen

Die physikalische Struktur unserer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit darf natürlich nicht von der zufälligen Wahl der Koordinaten abhängen, mit denen wir sie beschreiben. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Eigenschaften des metrischen Tensors und der Christoffel-Symbole aus dieser Forderung ableitbar sind, d. h., wie sich diese Größen bei einer Koordinatentransformation verhalten.

Als Koordinatentransformationen sind alle Transformationen der alten Koordinaten $x^n$ in neue Koordinaten $x^{n'}$ zugelassen, die einen eineindeutigen Zusammenhang gewährleisten:

$$x^{n'} = x^{n'}(x^n), \qquad \left|\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n}\right| \neq 0. \tag{3,15}$$

Wir haben in (3,15) schon von der Konvention Gebrauch gemacht, die neuen Koordinaten von den alten nicht durch ein neues Symbol (etwa $y^n$), sondern durch einen Strich am Index zu kennzeichnen. Diese Bezeichnungsweise ist für viele Rechnungen allgemeiner Art vorteilhaft, gelegentlich werden wir aber von ihr abweichen. Mit der Abkürzung

$$A_n^{n'} \equiv \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \tag{3,16}$$

erhalten wir aus (3,15) das Transformationsgesetz für die Koordinatendifferentiale:

$$\mathrm{d}x^{n'} = A_n^{n'}\,\mathrm{d}x^{n'}. \tag{3,17}$$

Aus der zu (3,15) inversen Transformation

$$x^n = x^n(x^{n'})$$

folgt analog:

$$\mathrm{d}x^n = A_{n'}^n\,\mathrm{d}x^{n'}, \qquad A_{n'}^n = \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}}, \tag{3,18}$$

und aus (3,17) und (3,18)

$$A_n^{n'} A_{m'}^n = \delta_{m'}^{n'}, \qquad A_{n'}^n A_m^{n'} = \delta_m^n. \tag{3,19}$$

Führt man zwei Transformationen nacheinander aus,

$$x^{n''} = x^{n''}(x^{n'}), \qquad x^{n'} = x^{n'}(x^n),$$

dann gilt für die Differentiale

$$\mathrm{d}x^{n'} = A_n^{n'}\,\mathrm{d}x^n,$$

$$\mathrm{d}x^{n''} = A_{n'}^{n''}\,\mathrm{d}x^{n'},$$

und für die Gesamttransformation folgt

$$\mathrm{d}x^{n''} = A_n^{n''}\,\mathrm{d}x^n, \qquad A_n^{n''} = A_{n'}^{n''} A_n^{n'}. \tag{3,20}$$

Die Gln. (3,17) bis (3,20) zeigen, daß die Koordinatentransformationen lokal durch die $4 \times 4$-Matrizen $A_n^{n'}$ dargestellt werden, die eine Gruppe bilden (Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation).

Gelegentlich transformiert man die Koordinatendifferentiale nach der Vorschrift (3,17), *ohne* daß die $A_n^{n'}$ die partiellen Ableitungen (3,16) von vier Funktionen $x^{n'}$ sind, d. h., es existiert keine zugeordnete Koordinatentransformation $x^{n'}(x^n)$. Man spricht dann von der Einführung einer *anholonomen* Basis.

Die Transformationsvorschrift für die Komponenten des metrischen Tensors erhalten wir aus der Forderung, daß sich Längen und Winkel bei einer Koordinaten-

transformation nicht ändern dürfen, also $\mathrm{d}s^2$ eine Invariante ist:

$$\mathrm{d}s'^2 \equiv g_{n'm'}\,\mathrm{d}x^{n'}\,\mathrm{d}x^{m'} = \mathrm{d}s^2 = g_{nm}\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}x^m = g_{nm}\,A^n_{n'}A^m_{m'}\,\mathrm{d}x^{n'}\,\mathrm{d}x^{m'}.$$

Da diese Gleichheit für beliebige Wahl der $\mathrm{d}x^{n'}$ gelten muß, folgt

$$g_{n'm'} = g_{nm}\,A^n_{n'}A^m_{m'}. \qquad (3,21)$$

Das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole berechnen wir am einfachsten unter Benutzung der Geodätengleichung (3,6). Da das Variationsprinzip (3,5) nur mit Hilfe der invarianten Größen $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}\lambda$ formuliert wurde, muß die Geodätengleichung auch in den neuen Koordinaten $x^{n'}$ die Form (3,6) haben:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{m'}}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{m'}_{a'b'}\,\frac{\mathrm{d}x^{a'}}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^{b'}}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \qquad (3,22)$$

(die Eigenschaft einer Kurve, kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu sein, ist von der Wahl der Koordinaten unabhängig). Setzen wir in (3,22) die aus (3,17) und

$$\frac{\mathrm{d}x^{m'}}{\mathrm{d}\lambda} = A^{m'}_m\,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}$$

folgende Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{m'}}{\mathrm{d}\lambda^2} = A^{m'}_m\,\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}\lambda^2} + A^{m'}_{m,b}\,\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$= -A^{m'}_m\Gamma^m_{ab}\,\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\lambda} + A^{m'}_{a,b}\,\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda}$$

ein und transformieren alles auf die gestrichenen Koordinaten, so erhalten wir schließlich

$$\Gamma^{m'}_{a'b'} = A^{m'}_m A^a_{a'}A^b_{b'}\Gamma^m_{ab} - A^{m'}_{a,b}A^a_{a'}A^b_{b'}. \qquad (3,23)$$

An dieser Transformationsvorschrift ist bemerkenswert, daß die neuen Christoffel-Symbole keine homogenen linearen Funktionen der alten sind. Es ist also durchaus möglich, daß in einem Riemannschen Raum die Christoffel-Symbole in einem Koordinatensystem nicht null sind, während sie in einem anderen Koordinatensystem identisch verschwinden. So sind im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum die Christoffel-Symbole in kartesischen Koordinaten identisch Null, während sie in Kugelkoordinaten die Werte (1,20) haben. Die Frage, ob die Christoffel-Symbole immer zum Verschwinden gebracht werden können, werden wir in Abschnitt 6.2. beantworten.

### 3.4. Spezielle Koordinatensysteme

Für viele Rechnungen und Überlegungen ist die Benutzung spezieller Koordinatensysteme zweckmäßig. Man muß aber in jedem Einzelfall prüfen, ob ein Koordinatensystem mit der gewünschten Eigenschaft auch wirklich existiert, d. h., ob es möglich ist, bei vorgegebener Metrik $g_{a'b'}$ die vier Funktionen $x^n(x^{n'})$ so zu bestimmen, daß die transformierte Metrik $g_{ab}$ die gestellten Forderungen erfüllt.

*Orthogonale Koordinaten.* Wenn die Matrix $g_{ab}$ nur Diagonalglieder hat,

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2, \tag{3,24}$$

handelt es sich um orthogonale Koordinaten, die Koordinatenlinien (Linien, auf denen jeweils nur eine Koordinate variiert) bilden rechte Winkel miteinander. Im dreidimensionalen euklidischen Raum benutzt man bevorzugt solche Koordinaten, z. B. Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten. Wie eine genauere Analyse zeigt, existiert in einem vierdimensionalen Riemannschen Raum ein solches orthogonales Koordinatensystem im allgemeinen nicht, da das Differentialgleichungssystem

$$g_{a'b'}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} = 0 \qquad \text{für } a \neq b \tag{3,25}$$

bei beliebig vorgegebenen Funktionen $g_{a'b'}$ keine der Bedingung (3,15) genügenden Lösungen $x^{a'}(x^a)$ hat. Dieses Ergebnis ist plausibel, da (3,25) ein System von 6 Differentialgleichungen für 4 Funktionen ist.

*Zeitorthogonale Koordinaten.* Üblicherweise werden wir die Zeit als vierte Koordinate wählen: $x^4 = ct$; zeitorthogonale Koordinaten liegen bei $g_{4\alpha} = 0$ vor. Hat $g_{44}$ außerdem noch den Betrag 1, handelt es sich um *Gaußsche Koordinaten* (*synchrone Koordinaten*). Da aus $g_{4\alpha} = 0$ auch $g^{4\alpha} = 0$ folgt (und umgekehrt), haben wir beim Übergang zu zeitorthogonalen Koordinaten das System

$$g^{4\alpha} = A^{\alpha}_{a'}A^{4}_{b'}g^{a'b'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^4}{\partial x^{b'}}g^{a'b'} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{3,26}$$

zu erfüllen. Man sieht, daß man die Funktion $x^4(x^{b'})$ noch beliebig vorgeben kann und dann für jede der Funktionen $x^\alpha(x^{a'})$ eine partielle Differentialgleichung zu lösen hat, wobei die Existenz der Lösung durch allgemeine Sätze gesichert ist. Zeitorthogonale Koordinaten

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + g_{44}(dx^4)^2 \tag{3,27}$$

lassen sich also immer einführen (daß $x^4$ den Namen Zeit hat, spielt dabei gar keine Rolle), und auch $|g_{44}| = 1$ läßt sich durch Wahl der Funktion $x^4(x^{b'})$ immer noch zusätzlich erreichen.

*Mitbewegte Koordinaten.* Bei späteren Anwendungen ist in dem Riemannschen Raum oft ein Geschwindigkeitsfeld (einer Flüssigkeit, von Körpern, von Beobachtern) $u^{i'} = dx^{i'}/d\lambda$ vorhanden. Da $\lambda$ ein koordinatenunabhängiger Parameter ist, transformieren sich die Komponenten dieser Geschwindigkeit wie die Koordinatendifferentiale:

$$u^n = A^n_{n'}u^{n'} = \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}}u^{n'}. \tag{3,28}$$

Durch eine Koordinatentransformation läßt sich immer erreichen, daß die drei räumlichen Komponenten $u^\alpha$ der Geschwindigkeit Null werden, da die Differentialgleichungen

$$u^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}u^{1'} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}u^{2'} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}u^{3'} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{4'}}u^{4'} = 0, \ldots \tag{3,29}$$

immer eine Lösung $x^\alpha(x^{n'})$ haben. In dem so entstandenen Koordinatensystem, in dem die Geschwindigkeit die Form $u^n = (0, 0, 0, u^4)$ hat, ändern die Teilchen ihren Ort

nicht, die Koordinaten werden mit den Teilchen mitbewegt (man kann sich anschaulich die Koordinatenwerte wie Namen auf die Teilchen aufgeklebt denken). Obwohl die Koordinatendifferenz zweier Teilchen sich niemals ändert, kann ihr Abstand auf Grund der Zeitabhängigkeit der Metrik varrieren.

*Lokales Minkowski-System.* In einem beliebig vorgegebenen Punkt, den wir im folgenden mit dem Koordinatenurpsrung $O$ identifizieren wollen, läßt sich erreichen, daß die Koordinatenlinien rechte Winkel miteinander bilden. Dies ist anschaulich unmittelbar klar und mathematisch dadurch beweisbar, daß man die konstante Matrix $(g_{a'b'}(O)$ mit Hilfe von geeigneten Transformationsmatrizen $A_a^{a'}$ auf Hauptachsen transformieren kann. Die dann im Punkt $O$ vorhandene Metrik

$$ds'^2 = g_{11}(dx^{1'})^2 + g_{22}(dx^{2'})^2 + g_{33}(dx^{3'})^2 + g_{44}(dx^{4'})^2$$

läßt sich durch eine Streckung der Koordinaten

$$x^1 = \sqrt{|g_{11}|}\, x^{1'}, \ldots$$

noch weiter vereinfachen zu

$$ds^2 = \pm(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2 \pm (dx^3)^2 \pm dx^4)^2. \tag{3,30}$$

Über die hier auftretenden Vorzeichen läßt sich im allgemeinen Fall beliebiger Metrik keine Aussage machen. Um den Anschluß an die Struktur des Minkowski-Raumes zu sichern, *fordern* wir, daß die in der allgemeinen Relativitätstheorie benutzten Räume die Signatur $+2$ haben, d. h., daß in jedem Punkt bei Transformation der Metrik auf die Form (3,30) drei positive und ein negatives Vorzeichen vorkommen. Wir nennen solche Räume *normalhyperbolische pseudoriemannsche Räume*. Man kann zeigen, daß die Signatur eine Invariante ist, d. h., unabhängig ist von der Wahl des Ausgangskoordinatensystems und der (nicht eindeutig bestimmten) Koordinatentransformationen, die zu (3,30) führen (Trägheitsgesetz der quadratischen Formen).

Es kann jedoch auch in physikalisch wichtigen Räumen (Gravitationsfeldern) singuläre Punkte geben, in denen die Metrik nicht auf die Normalform (3,30) gebracht werden kann. In diesen Punkten weicht offensichtlich die Raumstruktur wesentlich von der uns vertrauten ab.

*Lokal ebenes (geodätisches) System.* Nach der Einführung eines lokalen Minkowski-Systems haben wir in einem Punkt Verhältnisse wie in einem flachen vierdimensionalen Raum; man kann ein solches System auch noch auf eine (differentielle) Umgebung eines Punktes ausdehnen.

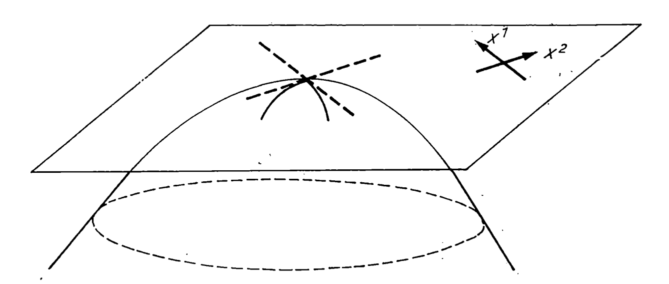



Abb. 3.1
Tangentialebene und lokal ebenes Koordinatensystem

Am Beispiel einer (beliebig gekrümmten) zweidimensionalen Fläche kann man dies veranschaulichen (vgl. Abb. 3.1.). Man lege in dem betrachteten Punkt die Tangentialebene an die Fläche und projiziere die kartesischen Koordinaten der Ebene auf die Fläche. Da Fläche und Tangentialebene einander berühren, weichen die so entstandenen Koordinatenlinien auf der Fläche nur in zweiter Ordnung von den Geraden der Ebene ab. Überträgt man diese Sprechweise auf die vierdimensionale Raum-Zeit, so würden wir hier die quasikartesischen Koordinaten des Tangential-Minkowski-Raumes auf den Riemannschen Raum projizieren und eine Metrik der Form

$$g_{nm}(x^a) = \eta_{nm} + \tfrac{1}{2}\, d_{nmab}(O)\, x^a x^b + \dots \tag{3,31}$$

erwarten; ein solches Koordinatensystem nennen wir deshalb lokal eben.

In der Tat kann man eine beliebige Metrik

$$\bar{g}_{nm}(\bar{x}^a) = \bar{g}_{nm}(O) + \bar{g}_{nm,i}(O)\, \bar{x}^i + \dots \tag{3,32}$$

lokal immer auf die Form (3,31) transformieren. Führt man nämlich durch

$$\begin{aligned} x^a &= \bar{x}^a + \tfrac{1}{2}\, \bar{\Gamma}^a_{mn}(O)\, \bar{x}^m \bar{x}^n + \dots, \\ \bar{x}^a &= x^a - \tfrac{1}{2}\, \bar{\Gamma}^a_{mn}(O)\, x^m x^n + \dots \end{aligned} \tag{3,33}$$

neue Koordinaten $x^a$ ein, so hat wegen

$$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^n} = \delta^a_n - \bar{\Gamma}^a_{mn}(O)\, x^m$$

der neue metrische Tensor (bei Vernachlässigung höherer als in $x^a$ linearer Glieder) die Gestalt

$$g_{mn} = \bar{g}_{ab}\left(\delta^a_n - \bar{\Gamma}^a_{in}(O)\, x^i\right)\left(\delta^b_m - \bar{\Gamma}^b_{km}(O)\, x^k\right).$$

Seine partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^s}\right|_{x^i=0} &= \bar{g}_{ab}(O)\left(-\bar{\Gamma}^a_{sn}(O)\, \delta^b_m - \delta^a_n \bar{\Gamma}^b_{sm}(O)\right) + \bar{g}_{nm,s}(O) \\ &= -\bar{g}_{am}(O)\, \bar{\Gamma}^a_{sn}(O) - \bar{g}_{nb}(O)\, \bar{\Gamma}^b_{sm}(O) + \bar{g}_{nm,s}(O) \end{aligned}$$

verschwinden aber alle, da die letzte Zeile wegen (3,11) Null ist. Wir sind also bei einer Metrik

$$g_{mn}(x^i) = g_{mn}(O) + \tfrac{1}{2}\, d_{nmab}(O)\, x^a x^b$$

angelangt, die durch Hauptachsentransformation und Streckung der Achsen in (3,31) verwandelt werden kann.

Da in einem lokal ebenen Koordinatensystem im Punkte $x^a = 0$ die partiellen Ableitungen der Metrik und damit alle Christoffel-Symbole verschwinden, vereinfacht sich die Geodätengleichung (3,6) lokal zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^n}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0, \tag{3,34}$$

d. h., die Koordinatenlinien (z. B. $x^1$ variabel; $x^2$, $x^3$ und $x^4$ konstant) sind Geodäten. Man nennt deshalb ein solches Koordinatensystem auch lokalgeodätisch. Sind die Koordinatenlinien sogar in der Umgebung eines Punktes Geodäten, spricht man von Riemannschen Normalkoordinaten.

Ein lokal ebenes Koordinatensystem bietet die beste Näherung an einen Minkowski-Raum, die in der Riemannschen Geometrie möglich ist. Wie gut diese Ersetzung eines gekrümmten Raumes durch den Tangentialraum ist, hängt von der Größe der Koeffizienten $d_{nmab}$ in (3,31) ab, in denen wir also ein Maß für die Krümmung des Raumes vermuten können.

## 3.5. Physikalische Bedeutung und Interpretation von Koordinatensystemen

Koordinaten sind Namen, die wir den Ereignissen der Welt geben; sie haben mit physikalischen Eigenschaften zunächst nichts zu tun. Aus diesem Grund sind auch alle Koordinatensysteme prinzipiell gleichwertig, und die Auswahl eines speziellen Systems ist eine reine Zweckmäßigkeitsfrage. Ähnlich wie man im dreidimensionalen Raum bei Kugelsymmetrie des Problems Kugelkoordinaten benutzen wird, wird man z. B. bei statischer Metrik die zeitorthogonalen Koordinaten (3,27) bevorzugen. Wegen der großen mathematischen Schwierigkeiten beim Lösen von Problemen der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das Finden eines dem Problem angepaßten Koordinatensystems oft der Schlüssel zum Erfolg.

Bei vielen Anwendungen ist man an Meßergebnissen eines speziellen Beobachters (oder einer Schar von Beobachtern) interessiert; man wird dann das Koordinatensystem mit diesem Beobachter und seinen Objekten verknüpfen (Beobachter auf der rotierenden Erde, in einem Satelliten, ...). Nach einer solchen Fixierung hat natürlich auch das Koordinatensystem eine physikalische Bedeutung, weil es an reale Objekte gebunden ist.

Neben den mitbewegten Koordinaten hat das lokal ebene Koordinatensystem eine besondere Bedeutung. Für einen Beobachter in dem ausgezeichneten $O$-Punkt des Koordinatensystems bewegen sich wegen (3,34) Teilchen, deren Bahnen Geodäten sind, kräftefrei. Geodäten sind aber Bahnkurven von Teilchen im Gravitationsfeld (wie wir plausibel gemacht haben und später noch beweisen werden), d. h., für den eben erwähnten Beobachter existiert (lokal) kein Gravitationsfeld: Das lokal ebene Koordinatensystem ist das System eines in dem betreffenden Raum-Zeit-Punkt frei fallenden Beobachters. Es ist die beste Annäherung an eine Minkowski-Welt, d. h. an ein Inertialsystem, die die Riemannsche Geometrie bietet. Es ist wie dieses nur bis auf vierdimensionale Drehungen (Lorentz-Transformationen) bestimmt.

Auch wenn man sich für ein bestimmtes Koordinatensystem entschieden hat, sollte man immer versuchen, Ergebnisse in invarianter, d. h. koordinatensystemunabhängiger Form anzugeben. Dazu ist es offensichtlich notwendig, das Koordinatensystem selbst in invarianter Weise zu charakterisieren. Die dabei zu benutzenden Hilfsmittel werden wir noch kennenlernen.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen zu der Frage, wie man denn bei vorgegebenem bzw. gewähltem Koordinatensystem mit physikalischen Hilfsmitteln den metrischen Tensor $g_{ab}$ bestimmen kann. Vorgabe des Koordinatensystems bedeutet dabei physikalisch, daß im Raum Beobachter verteilt sind, die Maßstäbe und Uhren besitzen. Lokal, in der differentiellen Umgebung eines Punktes, ist die Frage sehr einfach zu beantworten: Man nehme einen frei fallenden Beobachter, der in seinem Inertialsystem in der aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannten Art Längen und Zeiten mißt und damit den Abstand $ds^2$ zweier beliebiger Punkte weiß. Man transformiere dann auf das ursprünglich gegebene Koordinatensystem, d. h. drücke

das Ergebnis durch die Koordinaten der im Raum verteilten Beobachter aus. Da $ds^2$ sich dabei nicht ändert, kann man aus $ds^2 = g_{ab}\, dx^a\, dx^b$ bei bekannten $ds^2$ und $dx^a$ die $g_{ab}$ ablesen.

Bei der besonders wichtigen Zeitmessung unterscheidet man Uhren, die *beliebig* (vorwärts) gehen und dabei eine Koordinatenzeit $t$ anzeigen (die also keine unmittelbare physikalische Bedeutung hat), und Standarduhren, die die durch $ds^2 = -c^2\, d\tau^2$ definierte Eigenzeit $\tau$ anzeigen. Für eine ruhende Uhr ($dx^\alpha = 0$) besteht zwischen beiden Zeiten der Zusammenhang

$$d\tau^2 = -g_{44}\, dt^2. \qquad (3,35)$$

*Literatur zu Kapitel 3.:*

[7], [8], [15], [16], [19].

# 4. Tensoralgebra

Wie in der Speziellen Relativitätstheorie, so sollten auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie physikalische Größen und Gesetze bei Koordinatentransformationen

$$dx^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, dx^a = A_a^{a'}\, dx^a \qquad (4,1)$$

ein einfaches und wohldefiniertes Verhalten haben. Im Unterschied zu den Lorentz-Transformationen

$$x^{a'} = L_a^{a'} x^a, \qquad (4,2)$$

die lineare Transformationen der Koordinaten selbst mit ortsunabhängigen Koeffizienten $L_a^{a'}$ sind, handelt es sich jetzt um lineare Transformationen nur der Koordinatendifferentiale mit ortsabhängigen Koeffizienten $A_a^{a'}$. Beschränken wir uns aber auf die Untersuchung physikalischer Größen an einem Punkt, ohne Ableitungen zu bilden, werden die Unterschiede zu den Rechenregeln bei Lorentz-Transformationen geringfügig sein: Sie entsprechen dem Unterschied zwischen rechtwinkligen und schiefwinkligen kartesischen Koordinaten.

## 4.1. Skalare und Vektoren

*Skalare (Invarianten).* Ein Skalar ändert sich nicht bei einer Koordinatentransformation:

$$\varphi' = \varphi. \qquad (4,3)$$

Sein Zahlenwert im selben Punkt bleibt konstant, auch wenn sich die Koordinaten dieses Punktes ändern. Der Abstand $ds$ zweier Punkte ist z. B. ein Skalar.

*Vektoren.* Die 4 Größen $T^n$ sind genau dann die *kontravarianten Komponenten* eines Vektors, wenn sie sich wie die Koordinatendifferentiale transformieren:

$$T^{n'} = T^n A_n^{n'}. \qquad (4,4)$$

Diese Definition hat zur Folge, daß die Koordinaten $x^a$ selbst nicht die Komponenten eines Vektors sind — es gibt in einem Riemannschen Raum keinen Ortsvektor.

Nach der Vorschrift

$$T_a = g_{an}T^n, \qquad T^n = g^{na}T_a \tag{4,5}$$

kann man den kontravarianten Komponenten $T^n$ (Index oben) die *kovarianten Komponenten* $T_a$ (Index unten) zuordnen. Wegen der Transformationsgesetze (4,4) und (3,21) und der Beziehung (3,19) gilt für sie

$$T_{a'} = g_{a'n'}T^{n'} = g_{am}A^a_{a'}A^m_{n'}T^nA^{n'}_n = g_{an}T^nA^a_{a'},$$

also

$$T_{a'} = A^a_{a'}T_a. \tag{4,6}$$

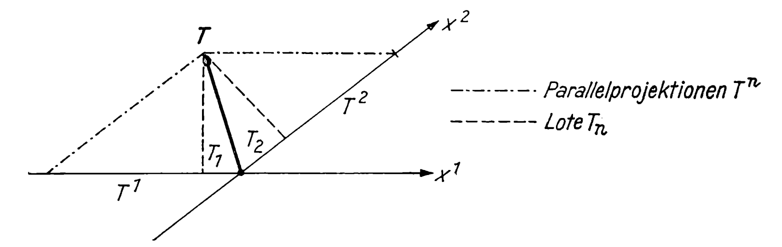



Abb. 4.1
Ko- und kontravariante Komponenten eines Vektors $T$

Ko- und kontravariante Komponenten stellen den gleichen Vektor dar, die Unterscheidung zwischen ihnen ist typisch für schiefwinklige Koordinaten.

In der $x^1$,$x^2$-Ebene von Abb. 4.1 ist dargestellt, wie man die kontravarianten Komponenten durch Parallelprojektion und die kovarianten durch Lote auf die Koordinatenachsen eines schiefwinklig kartesischen Systems (mit $g_{11} = g_{22} = 1$) erhält. Zur Übung wird empfohlen, das Verhalten der Komponenten bei der Transformation $x^{1'} = x^1 + bx^2$, $x^{2'} = x^2$ zu untersuchen.

## 4.2. Tensoren und andere geometrische Objekte

Geometrisches Objekt ist der Sammelbegriff für alle Objekte, deren Komponenten $\Omega^k$ bei einer Koordinatentransformation nach einer Vorschrift derart transformiert werden, daß die neuen Komponenten $\bar{\Omega}^k$ eindeutige Funktionen der alten, der Transformationsmatrix $A^{a'}_a$ und ihrer Ableitungen sind:

$$\bar{\Omega}^k = \bar{\Omega}^k(\Omega^k; A^{a'}_a; A^{a'}_{a.m}; A^{a'}_{a,m,n}; \ldots). \tag{4,7}$$

Einige für die Physik besonders wichtige geometrische Objekte werden wir in diesem Abschnitt kennenlernen.

*Tensoren.* Die Größen $T^a{}_{bc}{}^{d\ldots}_{\ldots}$ sind die Komponenten eines Tensors, wenn sie sich bezüglich jedes oberen (kontravarianten) Index wie die kontravarianten und bezüglich jedes unteren (kovarianten) Index wie die kovarianten Komponenten eines

Vektors transformieren:

$$T^{a'}{}_{b'c'}{}^{d'\dots}{}_{\dots} = T^{a}{}_{bc}{}^{d\dots}{}_{\dots} A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} A^{c}_{c'} A^{d'}_{d} \dots \tag{4,8}$$

Die *Stufe* eines Tensors ist gleich der Zahl seiner Indizes.

Entsprechend der für Vektoren geltenden Regel (4,5) können wir auch hier ko- und kontravariante Indizes ineinander umwandeln, z. B. aus (4,8) den kovarianten Tensor (Tensor aufgeschrieben in rein kovarianten Komponenten)

$$T_{abcd} = g_{an} g_{dm} T^{n}{}_{bc}{}^{m} \tag{4,9}$$

bilden [vgl. (4,24)].

Offensichtlich sind die $g_{ab}$ die kovarianten Komponenten eines Tensors 2. Stufe, [vgl. (3,21)], dessen „gemischte" Komponenten wegen (3,3) mit dem Kronecker-Symbol übereinstimmen:

$$g^{i}_{n} = \delta^{i}_{n}. \tag{4,10}$$

Weitere Beispiele von Tensoren werden wir noch kennenlernen.

*Tensordichten.* Transformieren wir die Determinante $g = |g_{ab}|$ des metrischen Tensors auf ein anderes Koordinatensystem, so erhalten wir

$$g' = |g_{a'b'}| = |g_{ab} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'}| = |g_{ab}|\,|A^{a}_{a'}|\,|A^{b}_{b'}|,$$

also

$$g' = |A^{a}_{a'}|^2\, g = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}\right|^2 g. \tag{4,11}$$

In die Transformationsvorschrift geht das Quadrat der Funktionaldeterminante $|\partial x^a/\partial x^{a'}|$ ein, es handelt sich bei $g$ um eine skalare Dichte vom Gewicht 2.

Allgemein sprechen wir von einer Tensordichte vom Gewicht $W$, wenn

$$T^{a'\dots}{}_{b'}{}^{c'\dots}{}_{\dots} = |A^{n}_{n'}|^{W}\, T^{a\dots}{}_{b}{}^{c\dots}{}_{\dots} A^{a'}_{a} A^{b}_{b'} A^{c'}_{c} \dots \tag{4,12}$$

gilt.

Aus der Gl. (4,11) können wir noch einen wichtigen Schluß ziehen: Da wir nur normalhyperbolische Riemannsche Räume zulassen, die in jedem Punkt die Einführung eines lokalen Minkowski-Systems mit $g' = |\eta_{mn}| = -1$ gestatten, das Vorzeichen von $g$ sich aber bei einer beliebigen Koordinatentransformation wegen (4,11) nicht ändert, ist $g$ immer negativ.

*Pseudotensoren.* In das Transformationsgesetz eines Pseudotensors geht zusätzlich (im Vergleich zu dem eines Tensors) noch das Vorzeichen eines der Elemente der Transformationsmatrix $A^{a}_{a'}$ oder einer Kombination ihrer Elemente ein. Ein einfaches Beispiel ist ein Pseudovektor

$$T^{n'} = \operatorname{sgn} |A^{a'}_{a}|\, T^{n} A^{n'}_{n}, \tag{4,13}$$

in dessen Transformationsgesetz das Vorzeichen der Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation eingeht. Er verhält sich bei Koordinatentransformationen vom lokalen Charakter einer Drehung wie ein Vektor, bei Spiegelungen ändert er noch zusätzlich sein Vorzeichen.

*Der ε-Pseudotensor.* In der Speziellen Relativitätstheorie wird häufig das Levi-Civita-Symbol $\Delta^{abcd}$ benutzt. Es ist dadurch definiert, daß es bei Vertauschung

zweier beliebiger Indizes sein Vorzeichen ändert und immer

$$\Delta^{1234} = 1 \tag{4,14}$$

gilt. Offensichtlich verschwinden wegen dieser Definition alle Komponenten mit zwei gleichen Indizes. Man kann zeigen, daß dieses Symbol bezüglich der Lorentz-Transformationen ein Pseudotensor ist; es wird deshalb auch als $\varepsilon$-(Pseudo)-Tensor bezeichnet.

Gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen verhält sich das Levi-Civita-Symbol jedoch nicht wie ein Tensor; (4,14) ist — bei Anwendung der Transformationsvorschrift (4,8) — z. B. nicht invariant gegenüber der Maßstabsveränderung $x^{a'} = \text{const}\, x^a$. Man kann aber auch in einem Riemannschen Raum dem Levi-Civita-Symbol einen Tensor zuordnen und damit den $\varepsilon$-Tensor verallgemeinern.

Wir definieren diesen verallgemeinerten $\varepsilon$-Tensor dadurch, daß er in jedem Punkt bei Einführung eines lokalen Minkowski-Systems mit dem Levi-Civita-Symbol übereinstimmt (M = Minkowski-System):

$$\overset{\mathrm{M}}{\varepsilon}{}^{a'b'c'd'} = \Delta^{a'b'c'd'}. \tag{4,15}$$

Transformieren wir diese Gleichung vom lokalen Minkowski-System $x^{n'}$ in ein beliebiges Koordinatensystem $x^n$, dann entsteht

$$\varepsilon^{abcd} = \pm \Delta^{a'b'c'd'} A^a_{a'} A^b_{b'} A^c_{c'} A^d_{d'}. \tag{4,16}$$

Die in (4,16) auftretende Vorzeichenunbestimmtheit rührt von der Pseudotensoreigenschaft des Levi-Civita-Symbols her. Zum Beispiel muß nach einer reinen Spiegelung $x^{1'} = -x^1$, also bei $A^1_{1'} = -1$, $A^2_{2'} = A^3_{3'} = A^4_{4'} = 1$, $A^a_{a'} = 0$ sonst, die ja wieder auf ein Minkowski-System führt, wieder (4,15) gelten, die Komponenten des $\varepsilon$-Tensors dürfen sich nicht ändern.

Man kann (4,16) jedoch in eine leichter handhabbare Form bringen. Denkt man sich nämlich in (4,16) die Indizes *abcd* festgehalten, z. B. in der Kombination 1234, dann steht in

$$\varepsilon^{1234} = \pm \Delta^{a'b'c'd'} A^1_{a'} A^2_{b'} A^3_{c'} A^4_{d'}$$

rechts gerade die Vorschrift zur Bildung der Determinante $|A^n_{n'}|$. Da in jedem Minkowski-System $g' = -1$ gilt, hat wegen (4,11) diese Determinante den Wert

$$|A^n_{n'}| = \pm \frac{1}{\sqrt{-g}},$$

so daß aus (4,16) mit

$$\varepsilon^{abcd} = \pm \Delta^{abcd}\, |A^n_{n'}|$$

die Beziehung

$$\varepsilon^{abcd} = \frac{\Delta^{abcd}}{\sqrt{-g}} \tag{4,17}$$

folgt, die wir auch als Definition des $\varepsilon$-Tensors auffassen können. Die Tensor-(Pseudotensor)-Eigenschaft des $\varepsilon$-Tensors läßt sich an dieser Gleichung unter Benutzung von (4,11) und den Regeln über Determinanten leicht nachweisen.

In Analogie zu (4,5) erhalten wir die kovarianten Komponenten des $\varepsilon$-Tensors aus

$$\varepsilon_{abcd} = g_{an}g_{bm}g_{pc}g_{qd}\varepsilon^{nmpq} = g_{an}g_{bm}g_{cp}g_{dq}\frac{\Delta^{nmpq}}{\sqrt{-g}}$$

$$= \frac{-g}{\sqrt{-g}}\,\Delta_{abcd},$$

es gilt also

$$\varepsilon_{abcd} = \sqrt{-g}\,\Delta_{abcd}. \qquad (4,18)$$

Dabei entsteht $\Delta_{abcd}$ aus $\Delta^{abcd}$ durch „Indexziehen“ mit der Minkowski-Raum-Metrik $\eta_{nm}$; insbesondere gilt $\Delta_{1234} = -1$.

*Christoffel-Symbole.* Aus dem Transformationsgesetz (3,23) der Christoffel-Symbole, also aus

$$\Gamma^{m'}_{a'b'} = A^{m'}_{m}A^{a}_{a'}A^{b}_{b'}\Gamma^{m}_{ab} - A^{m'}_{a,b}A^{a}_{a'}A^{b}_{b'}$$

lesen wir ab, daß sie geometrische Objekte, jedoch keine Tensoren sind.

*Zweipunkttensoren.* Zweipunkttensoren sind keine geometrischen Objekte im engeren Sinne. Sie treten in der Beschreibung physikalischer Vorgänge auf, bei denen eine im Punkt $P$ gelegene Ursache im Punkt $\bar{P}$ eine Wirkung hervorruft. Ihre Indizes beziehen sich auf den Punkt $P$ (normale Schreibweise) bzw. auf den Punkt $\bar{P}$ (Querstrich über dem Index). Dementsprechend lautet das Transformationsgesetz eines Zweipunkttensors z. B.

$$T_{\bar{a}'n'}(\bar{P}, P) = T_{\bar{a}n}(\bar{P}, P)\,A^{\bar{a}}_{\bar{a}'}(\bar{P})\,A^{n}_{n'}(P). \qquad (4,19)$$

Ein Beispiel eines Zweipunktskalars ist die Bogenlänge einer Geodäte, die die Punkte $P$ und $\bar{P}$ verbindet. Ein Beispiel eines Tensors werden wir in Abschnitt 5.3. kennenlernen (Parallelpropagator).

## 4.3. Rechenregeln für Tensoren

In der Tensoralgebra sind nur solche Operationen zugelassen, die aus Tensoren wieder Tensoren erzeugen. Da die Transformationsmatrizen $A^{a'}_{a}$ ortsabhängig sind, darf man deshalb im allgemeinen nur Tensoren im gleichen Punkt miteinander verknüpfen. Eine Ausnahme bilden die Skalare: Die Addition der Werte einer skalaren Funktion in zwei Punkten gibt wieder einen Skalar. Die folgenden Rechenregeln gelten ausschließlich für Tensoren, die im gleichen Punkt definiert sind. Nur gelegentlich werden wir explizit beweisen, daß die dargestellten Operationen wieder zu Tensoren führen — das Füllen der Lücken sei als Übungsaufgabe empfohlen.

*Addition.* Man addiert Tensoren gleicher Stufe und gleichen Indexbildes, indem man ihre Komponenten addiert:

$$T^{ab} + S^{ab} = R^{ab}. \qquad (4,20)$$

Verboten sind z. B. Gebilde der Form $T^{a} + S^{an}$ oder $T^{a}{}_{b} + S^{ab}$.

*Multiplikation.* Durch Multiplikation der Komponenten eines Tensors $n$-ter Stufe mit denen eines Tensors $m$-ter Stufe entsteht ein Tensor der Stufe $n + m$, z. B.

$$S^{a}{}_{b}{}^{c}T^{np}{}_{q} = N^{acnp}{}_{bq}. \qquad (4,21)$$

*Verjüngung.* Durch Summation über einen ko- und einen kontravarianten Index entsteht aus einem Tensor wieder ein Tensor, dessen Stufe um 2 verringert ist:

$$T^{ab}{}_{nm} \to T^{ab}{}_{am} = S^b{}_m. \tag{4,22}$$

Beweis der Tensoreigenschaft: Aus

$$T^{a'b'}{}_{n'm'} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^n_{n'} A^m_{m'} T^{ab}{}_{nm}$$

folgt unter Verwendung von (3,19)

$$\begin{aligned} T^{a'b'}{}_{a'm'} = S^{b'}{}_{m'} &= A^{a'}_a A^{b'}_b A^n_{a'} A^m_{m'} T^{ab}{}_{nm} \\ &= \delta^n_a A^{b'}_b A^m_{m'} T^{ab}{}_{nm} \\ &= A^{b'}_b A^m_{m'} S^b{}_m. \end{aligned}$$

Das einfachste Beispiel einer Verjüngung ist die *Spur* $T = T^a{}_a$ eines Tensors 2. Stufe.

*Überschieben, Indexziehen, Skalarprodukt.* Die Multiplikation zweier Tensoren mit anschließender Verjüngung über Indizes beider Faktoren nennt man Überschieben:

$$T^{na}{}_p \cdot S^{rp} = N^{nar}. \tag{4,23}$$

Ein wichtiges Beispiel für diese Operation ist das Indexziehen (Indexheben oder -senken) durch Überschieben mit dem metrischen Tensor:

$$T^n = g^{na} T_a, \qquad T^{nr}{}_{pq} = g_{pm} g^{rs} T^n{}_s{}^m{}_q, \tag{4,24}$$

mit dessen Hilfe man ko- und kontravariante Komponenten ineinander umwandeln kann.

Ein anderes Beispiel ist das Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$a_n b^n = g_{rn} a^r b^n = g^{ik} a_i b_k, \tag{4,25}$$

mit dem Spezialfall

$$a^2 = a_n a^n. \tag{4,26}$$

Das Vorzeichen der Invariante $a^2$ kann in koordinatensystemunabhängiger Weise zur Charakterisierung des Vektors $a^n$ dienen: Wie in der Speziellen Relativitätstheorie nennt man Vektoren mit $a^2 > 0$ raumartig, mit $a^2 < 0$ zeitartig und mit $a^2 = 0$ lichtartig (Nullvektoren).

*Der Quotientensatz.* Ein Gebilde $N^{ab\ldots}{}_{pq\ldots}$ ist genau dann ein Tensor, wenn das Produkt mit jedem Tensor $T^{pq\ldots}_{ab\ldots}$ eine Invariante ist:

$$N^{ab\ldots}_{pq\ldots} T^{pq\ldots}_{ab\ldots} = \text{inv.}$$

Am Beispiel der Differentialform

$$B_n \, dx^n = \text{inv.} \tag{4,27}$$

wollen wir den Beweis dieses Satzes explizit durchführen.

Wenn $B_n$ ein Vektor ist, folgt die Invarianz des Skalarproduktes trivialerweise. Zur Umkehrung haben wir zu zeigen, daß aus (4,27) das richtige Transformationsverhalten für $B_n$ folgt. In der Tat kann

$$(B_n)' \, dx^{n'} = B_n \, dx^n = B_m \delta^m_n \, dx^n = B_m A^m_{n'} A^{n'}_n \, dx^n = B_m A^m_{n'} \, dx^{n'}$$

für alle möglichen Richtungen $dx^n$ nur für

$$(B_n)' = B_m A^m_{n'}$$

gelten.

*Formeln für Produkte von ε-Tensoren.* Wenn man bei einer Rechnung auf ein Produkt von zwei ε-Tensoren stößt, kann man dieses durch Kronecker-Symbole $\delta^a_b = g^a_b$ bzw. den metrischen Tensor $g_{ab}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{pqnm} = {} & -g^p_a g^q_b g^n_c g^m_d + g^q_a g^n_b g^m_c g^p_d - g^n_a g^m_b g^p_c g^q_d \\
& + g^m_a g^p_b g^q_c g^n_d + g^q_a g^p_b g^n_c g^m_d - g^p_a g^n_b g^m_c g^q_d \\
& + g^n_a g^m_b g^q_c g^p_d - g^m_a g^q_b g^p_c g^n_d + g^n_a g^q_b g^p_c g^m_d \\
& - g^q_a g^p_b g^m_c g^n_d + g^p_a g^m_b g^n_c g^q_d - g^m_a g^n_b g^q_c g^p_d \\
& + g^m_a g^q_b g^n_c g^p_d - g^q_a g^n_b g^p_c g^m_d + g^n_a g^p_b g^m_c g^q_d - g^p_a g^m_b g^q_c g^n_d \\
& + g^p_a g^n_b g^q_c g^m_d - g^n_a g^q_b g^m_c g^p_d + g^q_a g^m_b g^p_c g^n_d - g^m_a g^p_b g^n_c g^q_d \\
& + g^p_a g^q_b g^m_c g^n_d - g^q_a g^m_b g^n_c g^p_d + g^m_a g^n_b g^p_c g^q_d - g^n_a g^p_b g^q_c g^m_d ,
\end{aligned} \tag{4,28}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{aqnm} = {} & -g^q_b g^n_c g^m_d - g^n_b g^m_c g^q_d - g^m_b g^q_c g^n_d \\
& + g^q_b g^m_c g^n_d + g^m_b g^n_c g^q_d + g^n_b g^q_c g^m_d ,
\end{aligned} \tag{4,29}$$

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{abnm} = -2(g^n_c g^m_d - g^m_c g^n_d), \tag{4,30}$$

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{abcm} = -6 g^m_d , \tag{4,31}$$

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{abcd} = -24. \tag{4,32}$$

Formel (4,28) folgt aus (4,17) und (4,18) und den Symmetrieeigenschaften des Levi-Civita-Symbols. Insbesondere sind ja die Komponenten dieses Symbols nur dann von Null verschieden, wenn alle vier Indizes verschiedene Werte haben; das Produkt verschwindet also nur dann nicht, wenn die Werte der Indizes paarweise übereinstimmen. Die restlichen Formeln folgen aus (4,28) durch Verjüngen unter Beachtung von $g^a_a = 4$.

## 4.4. Symmetrien und Tensoren

Ein Tensor heißt symmetrisch bezüglich zweier Indizes $r$, $s$, die beide kontravariant oder kovariant sind, wenn sich seine Komponenten bei Vertauschung dieser Indizes nicht ändern:

$$T^{ab}{}_{rs} = T^{ab}{}_{sr}. \tag{4,33}$$

Er heißt antisymmetrisch bezüglich eines Indexpaares $a$, $b$, wenn er bei Vertauschung beider Indizes nur sein Vorzeichen wechselt:

$$T^{ab}{}_{rs} = -T^{ba}{}_{rs}. \tag{4,34}$$

Diese Symmetrieeigenschaften bleiben bei Koordinatentransformationen erhalten.

Man kann von einem beliebigen Tensor den bezüglich zweier Indizes $a$, $m$ symmetrischen Anteil bilden (ihn symmetrisieren), indem man die halbe Summe der Komponenten mit den permutierten Indizes bildet:

$$T_{(a|bc|m)} = \tfrac{1}{2}\,(T_{abcm} + T_{mbca}). \tag{4,35}$$

Analog erhält man den antisymmetrischen Anteil

$$T_{[a|bc|m]} = \tfrac{1}{2}(T_{abcm} - T_{mbca}). \tag{4,36}$$

Wir haben dabei schon die Schreibweise der *Bachschen Klammern* benutzt: runde Klammern für die Symmetrisierung, eckige für die Antisymmetrisierung. Die von der Vorschrift nicht erfaßten Indizes in den Klammern werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Diese Schreibweise ist besonders vorteilhaft, wenn man Tensoren bezüglich mehrerer Indizes symmetrisiert (die Summe der Tensorkomponenten mit allen Permutationen der Indizes bildet und durch die Zahl der Permutationen dividiert) oder antisymmetrisiert (die Tensorkomponenten bei gerader Permutation der Indizes addiert, bei ungerader subtrahiert, und durch die Zahl der Permutationen teilt), z. B.

$$T_{(n_1\ldots n_\nu)} = \frac{1}{\nu!}\{T_{n_1n_2\ldots n_\nu} + T_{n_2n_1\ldots n_\nu} + \ldots T_{n_\nu n_1 n_2}\ldots + \ldots\}, \tag{4,37}$$

$$T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\{T_{abc} - T_{bac} + T_{bca} - T_{cba} + T_{cab} - T_{acb}\}. \tag{4,38}$$

Den Vorteil dieser Schreibweise sieht man bei Anwendung auf Formel (4,28), die einfach als

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{pqnm} = -24 g_a^{[p} g_b^q g_c^n g_d^{m]} \tag{4,39}$$

geschrieben werden kann.

Tensoren, die bezüglich aller Indizes symmetrisch oder antisymmetrisch sind, heißen vollsymmetrisch bzw. vollantisymmetrisch.

Ein vollantisymmetrischer Tensor dritter Stufe $T_{abc}$ hat genau 4 wesentlich verschiedene Komponenten, z. B. $T_{123}$, $T_{124}$, $T_{134}$ und $T_{234}$, also genauso viele wie ein Vektor. Man kann dies ausnutzen, um ihn mit Hilfe des $\varepsilon$-Pseudotensors auf einen Pseudovektor $T^n$ abzubilden:

$$\varepsilon^{abcn}T_{abc} = T^n, \qquad T_{abc} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{nabc}T^n, \tag{4,40}$$

in Analogie zur Abbildung eines antisymmetrischen Tensors (z. B. des Vektorprodukts zweier Vektoren) auf einen Pseudovektor im dreidimensionalen euklidischen Raum.

Ein vollantisymmetrischer Tensor vierter Stufe $T^{abc}$ hat nur eine wesentliche Komponente und läßt sich mit Hilfe des $\varepsilon$-Pseudotensors auf einen Pseudoskalar $T$ abbilden:

$$\varepsilon_{abcd}T^{abcd} = T; \tag{4,41}$$

er ist dem $\varepsilon$-Tensor proportional.

Vollantisymmetrische Tensoren höherer als 4. Stufe gibt es in einem vierdimensionalen Raum nicht.

## 4.5. Algebraische Eigenschaften der Tensoren 2. Stufe

Ein beliebiger Tensor zweiter Stufe kann in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden, der symmetrische nochmals in einen Term ohne Spur und einen Term proportional zum metrischen Tensor:

$$\begin{aligned} T_{ab} &= T_{[ab]} + T_{(ab)} \\ &= T_{[ab]} + \{T_{(ab)} - \tfrac{1}{4}T^n_n g_{ab}\} + \tfrac{1}{4}T^n_n g_{ab}. \end{aligned} \tag{4,42}$$

Die physikalisch wichtigen Tensoren zweiter Stufe gehören oft einer der Symmetrieklassen an, oder ihre Bestandteile haben zumindest eine unterschiedliche physikalische Bedeutung. So ist z. B. der elektromagnetische Feldstärketensor antisymmetrisch, der Energieimpulstensor des elektromagnetischen Feldes symmetrisch und spurfrei, der allgemeine Energieimpulstensor symmetrisch.

Wegen der besonderen Wichtigkeit der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe wollen wir einige ihrer algebraischen Eigenschaften (Eigenvektoren, Eigenwerte, Normalformen) genauer untersuchen.

*Der metrische Tensor.* Die Definitionsgleichung

$$g_{ab}w^b = \lambda w_a \tag{4,43}$$

für Eigenvektoren $w_a$ des metrischen Tensors ist (trivialerweise) mit $\lambda = 1$ für jeden Vektor $w_a$ erfüllt: Jeder Vektor ist Eigenvektor des metrischen Tensors, $g_{ab}$ zeichnet keine Richtung im Raum aus.

*Der symmetrische Tensor.* Aus der Eigenvektorgleichung

$$T_{ab}w^b = \lambda w_a \tag{4,44}$$

bzw.

$$(T_{ab} - \lambda g_{ab})\, w^b = 0, \tag{4,45}$$

die man als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der $w^b$ auffassen kann, folgt als Lösbarkeitsbedingung sofort die Säkulargleichung

$$|T_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0. \tag{4,46}$$

Aus ihr lassen sich die Eigenwerte $\lambda$ bestimmen. Da bei einer Koordinatentransformation wegen (4,8) die Säkulargleichung nur mit dem Quadrat der Determinante $|A^a_{a'}|$ multipliziert wird, sind die Eigenwerte $\lambda$ und damit auch die Koeffizienten $\alpha_A$ der aus (4,46) folgenden Gleichung

$$\lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4 = 0 \tag{4,47}$$

Invarianten. Da die $\alpha_A$ durch algebraische Operationen aus den Komponenten des Tensors $T_{ab}$ und des metrischen Tensors entstehen, sind es algebraische Invarianten des Tensors $T_{ab}$. Man kann zeigen, daß alle anderen algebraischen Invarianten aus den $\alpha_A$ aufgebaut werden können. Die Invarianzeigenschaft kann man z. B. an

$$\alpha_1 = -T^n_{\ n}, \qquad \alpha_4 = |T_{ab}|\, g^{-1}$$

auch direkt erkennen.

Die Gl. (4,47) gibt uns im allgemeinen vier verschiedene Eigenwerte $\lambda$, zu denen sich dann die Eigenvektoren bestimmen lassen. Wir wollen auf die Einzelheiten und Sonderfälle hier nicht eingehen, jedoch auf einige wichtige Eigenschaften hinweisen: Während man im dreidimensionalen Raum einen symmetrischen Tensor immer gleichzeitig mit dem metrischen Tensor auf Hauptachsen transformieren kann, ist dies in einem pseudoriemannschen vierdimensionalen Raum nicht immer möglich, d. h., es gibt Tensoren, die sich in einem lokalen Minkowski-System durch reelle Transformation nicht auf Diagonalform bringen lassen. Diese Möglichkeit hängt eng mit dem

Auftreten von Nullvektoren zusammen, wie man an dem Beispiel

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{ab} = 2k_a k_b = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2}\, k_a = (0, 0, 1, -1) \tag{4,48}$$

sehen kann, in dem der Tensor $T_{ab}$ allein aus dem Nullvektor $k_a$ aufgebaut wurde und sich durch Lorentz-Transformationen ($g_{ab} = \eta_{ab}$ invariant!) nicht auf Hauptachsen transformieren läßt.

*Der antisymmetrische Tensor.* Natürlich läßt sich ein antisymmetrischer Tensor $F_{ab}$ niemals auf Diagonalform bringen, jedoch ist die Frage nach Eigenwerten und Eigenvektoren wiederum sinnvoll. Wegen der Antisymmetrie des Tensors $F_{ab}$ folgt aus der Eigenwertgleichung

$$F_{ab} w^b = \lambda w_a \tag{4,49}$$

durch Überschieben mit $w^a$ die Beziehung

$$\lambda w_a w^a = 0,$$

d. h., entweder der Eigenwert $\lambda$ ist Null, oder der Eigenvektor $w^a$ ist ein Nullvektor (oder beides).

Wegen der Antisymmetrie von $F_{ab}$ gilt außerdem

$$|F_{ab} - \lambda g_{ab}| = |-F_{ba} - \lambda g_{ba}| = |F_{ba} + \lambda g_{ba}|,$$

und da man vor der Determinantenbildung Zeilen und Spalten vertauschen kann, folgt

$$|F_{ab} - \lambda g_{ab}| = |F_{ab} + \lambda g_{ab}|.$$

Die Säkulargleichung

$$|F_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0 \tag{4,50}$$

geht also bei $\lambda \to -\lambda$ in sich über und enthält deshalb nur geradzahlige Potenzen von $\lambda$:

$$\lambda^4 + \beta_2 \lambda^2 + \beta_4 = 0. \tag{4,51}$$

Sie liefert deshalb auch nur zwei Invarianten, $\beta_2$ und $\beta_4$.

Jeder antisymmetrische Tensor $F_{ab}$ läßt sich dualisieren, d. h. mit Hilfe des $\varepsilon$-Tensors auf den zugeordneten dualen (Pseudo-)Tensor $\tilde{F}_{ab}$ abbilden:

$$\tilde{F}^{ab} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^{abcd} F_{cd}. \tag{4,52}$$

Wegen der Eigenschaft (4,30) des $\varepsilon$-Tensors gibt zweimaliges Dualisieren wieder — bis auf das Vorzeichen — den ursprünglichen Tensor:

$$\tilde{\tilde{F}}_{nm} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{nmab} \tilde{F}^{ab} = \tfrac{1}{4}\, \varepsilon_{mnab} \varepsilon^{abcd} F_{cd} = -F_{nm}. \tag{4,53}$$

Man kann zeigen, daß sich die beiden Invarianten $\beta_2$ und $\beta_4$ in einfacher Weise durch $F_{ab}$ und $\tilde{F}_{ab}$ ausdrücken lassen. Es gilt

$$\beta_2 = F_{ab} F^{ab}, \qquad \beta_4 = (F_{ab} \tilde{F}^{ab})^2. \tag{4,54}$$

Dabei ist $F_{ab}\tilde{F}^{ab}$ eine Pseudoinvariante.

Ein antisymmetrischer Tensor heißt auch *Bivektor*. Läßt er sich aus nur zwei Vektoren $a^i$ und $b^i$ gemäß

$$F_{nm} = a_n b_m - a_m b_n \tag{4,55}$$

bilden, handelt es sich um einen *einfachen* oder *zerlegbaren Bivektor*. Da es in einem vierdimensionalen Raum 4 linear unabhängige Vektoren gibt, kann man $6 = \binom{4}{2}$ Bivektoren aus ihnen konstruieren, und jeder antisymmetrische Tensor (mit 6 unabhängigen Komponenten) läßt sich aus diesen 6 linear unabhängigen Bivektoren aufbauen. Wir werden diese Idee in Kapitel 18. weiterverfolgen und dort auch die Klassifizierung antisymmetrischer Tensoren weiter entwickeln.

### 4.6.* Tetraden- und Spinorkomponenten von Tensoren

*Tetraden.* In jedem Punkt des Raumes kann man ein System von 4 linear unabhängigen Vektoren $h_a^{(r)}$ einführen, die wir auch als Tetraden bezeichnen. Der eingeklammerte Index ist der Tetradenindex, er numeriert die Vektoren von 1 bis 4. Diese 4 Vektoren können beliebige Längen haben und beliebige Winkel miteinander bilden (soweit es die lineare Unabhängigkeit zuläßt). Die Matrix

$$g^{(r)(s)} = h_a^{(r)} h_b^{(s)} g^{ab} \tag{4,56}$$

ist eine beliebige symmetrische Matrix mit von Null verschiedener negativer Determinante. Ihr Inverses $g_{(s)(t)}$, das durch

$$g_{(s)(t)} g^{(t)(r)} = \delta_{(s)}^{(r)} = g_{(s)}^{(r)} \tag{4,57}$$

definiert ist, können wir benutzen, um Tetradenvektoren mit unteren Tetradenindizes zu definieren,

$$h_{(r)a} = g_{(r)(s)} h_a^{(s)}, \tag{4,58}$$

und um die Gl. (4,56) nach $g_{ab}$ aufzulösen:

$$g_{ab} = g_{(r)(s)} h_a^{(r)} h_b^{(s)}. \tag{4,59}$$

*Tetradenkomponenten von Tensoren.* So wie man jeden beliebigen Vektor als Linearkombination der vier Tetradenvektoren schreiben kann, kann man auch jeden Tensor mit ihrer Hilfe darstellen:

$$T^{ab\ldots}{}_{nm\ldots} = T^{(r)(s)\ldots}{}_{(p)(q)\ldots} h_{(r)}^a h_{(s)}^b h_n^{(p)} h_m^{(q)} \ldots \tag{4,60}$$

Die Größen $T^{(r)(s)\ldots}{}_{(p)(q)\ldots}$ heißen die Tetradenkomponenten des Tensors. Man berechnet sie — in Übereinstimmung mit (4,56) und (4,58) — gemäß

$$T^{(r)(s)\ldots}{}_{(p)(q)\ldots} = T^{ab\ldots}{}_{nm\ldots} h_a^{(r)} h_b^{(s)} h_{(p)}^n h_{(q)}^m \ldots \tag{4,61}$$

Tetradenindizes werden mit $g^{(r)(s)}$ bzw. $g_{(r)(s)}$ gehoben oder gesenkt.

*Koordinaten- und Tetradentransformationen.* Die Vorteile, die in manchen Fällen die Benutzung der zunächst recht kompliziert erscheinenden Tetradenkomponenten bietet, erkennt man bei Betrachtung der Transformationseigenschaften und bei der Einführung von Tetraden, die dem gerade untersuchten Problem angepaßt sind.

Wie ein Blick auf die Definitionsgleichung (4,61) lehrt, verhalten sich die Tetradenkomponenten bei Koordinatentransformationen wie Skalare: Die Nummern der Tetradenvektoren, d. h. die Tetradenindizes, ändern sich bei einer Koordinatentransformation selbstverständlich nicht. Man kann deshalb algebraische Eigenschaften von Tensoren gut untersuchen oder Tensorkomponenten (d. h. Tetradenkomponenten) in koordinatenunabhängiger Weise durch die Wahl der Tetraden vereinfachen.

Außer den Koordinatentransformationen — und völlig unabhängig von ihnen — kann man in jedem Punkt des Raumes durch eine lineare (ortsabhängige) Transformation der Tetradenvektoren $h_a^{(r)}$ ein neues Tetradensystem einführen:

$$h_a^{(r)'} = A_{(r)}^{(r)'} h_a^{(r)}, \qquad h_{(r)'a} = A_{(r)'}^{(r)} h_{(r)a}, \qquad A_{(r)}^{(r)'} A_{(s)'}^{(r)} = \delta_{(s)'}^{(r)'}. \tag{4,62}$$

Bei einer solchen Transformation ändern sich natürlich die Tetradenkomponenten von Tensoren, und zwar werden sie mit den Matrizen $A_{(r)}^{(r)'}$ bzw. $A_{(r)'}^{(r)}$ transformiert, z. B.

$$g_{(s)'(t)'} = g_{(s)(t)} A_{(s)'}^{(s)} A_{(t)'}^{(t)}. \tag{4,63}$$

*Spezielle Tetradensysteme.* Wir können die Tetraden so wählen, daß die vier Vektoren in jedem Punkt genau in Richtung der Koordinatenachsen zeigen, also parallel zu den 4 Koordinatendifferentialen $dx^a$ sind:

$$h_{(r)}^a = \delta_{(r)}^a, \qquad g_{rs} = g_{(r)(s)}. \tag{4,64}$$

Diese Festlegung hat zur Folge, daß Tetraden- und Tensorkomponenten zusammenfallen. Es ist aber umgekehrt nicht immer möglich, bei im Raum willkürlich vorgegebenem Tetradensystem die Koordinaten so zu transformieren, daß die Tetraden zu Tangentenvektoren der Koordinatenlinien werden.

Eine zweite wichtige Möglichkeit ist die Identifizierung der Tetradenvektoren mit den Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems im lokalen Minkowski-System des betrachteten Punktes:

$$g_{(r)(s)} = h_{(r)}^a h_{(s)}^b g_{ab} = \eta_{(r)(s)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{4,65}$$

Die vier Tetradenvektoren, die wir $z_a$, $w_a$, $v_a$ und $u_a/c$ nennen wollen, bilden ein orthonormiertes System aus drei raumartigen und einem zeitartigen Vektor. Für den metrischen Tensor folgt aus (4,59) und (4,65)

$$g_{ab} = z_a z_b + w_a w_b + v_a v_b - u_a u_b/c^2. \tag{4,66}$$

Ein dritter Spezialfall ist die Benutzung von Nullvektoren als Tetradenvektoren. In unserem pseudoriemannschen Raum der Signatur 2 gibt es zwei linear unabhängige Nullvektoren, die wir $k_a$ und $l_a$ nennen und die aus dem oben eingeführten Orthonormalsystem durch

$$k_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a + u_a/c), \qquad l_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_a/c - v_a) \tag{4,67}$$

gebildet werden können. Formal kann man aber durch

$$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a - i w_a), \qquad \bar{t}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a + i w_a) \tag{4,68}$$

zwei weitere (zueinander konjugiert komplexe) Nullvektoren $t^a$ und $\bar{t}^a$ einführen. Aus (4,56) und (4,57) folgt

$$g_{(r)(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4,69)$$

d. h., von allen möglichen Skalarprodukten der Basisvektoren sind nur

$$t_a \bar{t}^a = 1, \qquad k_a l^a = -1 \qquad (4,70)$$

von Null verschieden. Der metrische Tensor hat in diesem Tetradensystem gemäß (4,59) die Gestalt

$$g_{ab} = t_a \bar{t}_b + \bar{t}_a t_b - k_a l_b - l_a k_b. \qquad (4,71)$$

Bei Benutzung dieses Systems können komplexe Tetradenkomponenten entstehen, während wir ja sonst immer nur reelle Koordinaten, Transformationen und Tensoren zugelassen hatten.

*Spinoren.* Spinoren erster Stufe sind Elemente eines zweidimensionalen komplexen Vektorraums, in dem ein alternierendes Skalarprodukt

$$[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi] \qquad (4,72)$$

erklärt ist. Ein Spinor $\varphi$ läßt sich entweder durch seine kontravarianten Komponenten $\varphi^A$ oder durch seine kovarianten Komponenten $\varphi_A$ darstellen. Das Skalarprodukt zweier Spinoren läßt sich aus diesen Komponenten mit Hilfe des metrischen Spinors $\varepsilon_{AB}$ bilden:

$$[\varphi, \psi] = \varepsilon_{AB} \varphi^A \psi^B = -\varepsilon_{AB} \psi^A \varphi^B, \qquad A, B = 1, 2. \qquad (4,73)$$

Der metrische Spinor ist antisymmetrisch:

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}. \qquad (4,74)$$

Ihn und sein durch

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon^{CB} = \delta_A^C \qquad (4,75)$$

definiertes Inverses $\varepsilon^{CB}$ kann man zum Indexbewegen benutzen:

$$\varphi^A = \varepsilon^{AB} \varphi_B, \qquad \varphi_B = \varphi^A \varepsilon_{AB}. \qquad (4,76)$$

Die Skalarprodukte (4,72) bzw. (4,73) ändern sich nicht, wenn man eine unimodulare Transformation

$$\begin{aligned} &\varphi^{A'} = \Lambda_A^{A'} \varphi^A, \qquad \varphi_{A'} = \Lambda_{A'}^A \varphi_A, \\ &|\Lambda_A^{A'}| = 1, \qquad \Lambda_A^{A'} \Lambda_{B'}^A = \delta_{B'}^{A'} \end{aligned} \qquad (4,77)$$

durchführt. Der Zusammenhang zwischen der Gruppe der unimodularen Transformationen und der ihr isomorphen Gruppe der Lorentz-Transformationen spielt in der speziell-relativistischen Feldtheorie eine große Rolle.

Größen, die sich mit der konjugiert komplexen Matrix $\overline{(\Lambda_A^{A'})} = \Lambda_{\dot{A}}^{\dot{A}'}$ transformieren, kennzeichnen wir durch einen Punkt über dem Index: $\varphi_{\dot{A}}, \psi^{\dot{B}}, \ldots$ Für sie gilt also

$$\varphi^{\dot{A}'} = \Lambda_{\dot{A}}^{\dot{A}'} \varphi^{\dot{A}}. \tag{4,78}$$

Skalarprodukte $\varphi^{\dot{A}}\psi_{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varphi^{\dot{A}}\psi^{\dot{B}}$ bleiben bei solchen Transformationen invariant. Entsprechend dieser Bezeichnungsweise bildet man das konjugiert Komplexe eines Spinors durch Punktieren des Index (natürlich mit $\ddot{A} \equiv A$):

$$\overline{(\varphi_A)} = \varphi_{\dot{A}}. \tag{4,79}$$

Spinoren höherer Stufe $\chi_{A\dot{B}\ldots}{}^{M\dot{N}\ldots}$ sind Gebilde, die sich bei unimodularen Transformationen bezüglich jedes Index wie die entsprechenden Spinoren erster Stufe verhalten. Die Rechenregeln für diese Spinoren folgen aus den oben skizzierten Eigenschaften der Spinoren erster Stufe. Bei Überschiebungen und Verjüngungen ist zu beachten, daß nur Summation über jeweils einen kontravarianten und kovarianten Index gleicher Art (also punktiert *oder* unpunktiert) wieder einen Spinor ergibt.

Ein Spinor ist hermitesch, wenn er folgende Bedingung erfüllt:

$$\varphi_{\dot{A}B} = \varphi_{B\dot{A}}. \tag{4,80}$$

*Spinorkomponenten von Tensoren.* Mit Hilfe der metrischen Spintensoren $\sigma_m{}^{A\dot{B}} = \sigma_m{}^{\dot{B}A}$, die Verallgemeinerungen der Paulischen Spinmatrizen sind, kann man die vier komplexen Komponenten $\varphi_{A\dot{B}}$ eines beliebigen Spinors 2. Stufe auf die vier (im allgemeinen dann auch komplexen) Komponenten eines Vierervektors abbilden:

$$\begin{aligned} T^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \sigma^a{}_{A\dot{B}}\varphi^{A\dot{B}}, \\ T^aT_a &= -\varphi_{A\dot{B}}\varphi^{A\dot{B}}, \\ \varphi_{A\dot{B}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, \sigma_{aA\dot{B}}T^a. \end{aligned} \tag{4,81}$$

Dabei genügen die vier $2 \times 2$-Matrizen $\sigma_a{}^{A\dot{B}}$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma^a{}_{A\dot{B}}\sigma_{aC\dot{D}} &= -2\varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \\ \sigma_m{}^{A\dot{B}}\sigma_{nA\dot{B}} &= -2g_{mn}. \end{aligned} \tag{4,82}$$

In analoger Weise kann man jeden Tensor $n$-ter Stufe auf einen Spinor der Stufe $2n$ abbilden.

Aus zwei Basisspinoren $\varkappa_A$ und $\mu_A$, die die Beziehungen

$$\varkappa_A\mu^A = -\mu_A\varkappa^A = 1, \qquad \varkappa_A\varkappa^A = \mu_A\mu^A = 0 \tag{4,83}$$

erfüllen, kann man 4 Spinoren zweiter Stufe

$$\begin{aligned} \varkappa_A\mu_{\dot{B}} &= t_{A\dot{B}}, & \varkappa_A\varkappa_{\dot{B}} &= k_{A\dot{B}}, \\ \mu_A\varkappa_{\dot{B}} &= \bar{t}_{A\dot{B}}, & \mu_A\mu_{\dot{B}} &= l_{A\dot{B}} \end{aligned} \tag{4,84}$$

bilden. Die ihnen nach der Vorschrift (4,81) zugeordneten Vektoren $t_a$, $\bar{t}_a$, $k_a$ und $m_a$ genügen genau den Relationen (4,69) und (4,70) des Nulltetradensystems. Es besteht

also eine enge Beziehung zwischen der Darstellung eines Tensors durch seine Spinorkomponenten und der Darstellung durch seine Komponenten bezüglich einer Nulltetrade.

*Literatur zu Kapitel 4.:*

[7], [15], [16], [63], [172].

# 5. Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung

## 5.1. Partielle und kovariante Ableitung

Physikalische Gesetze werden meist in der mathematischen Form von Differentialgleichungen aufgeschrieben. Um die Unabhängigkeit der Gesetze vom Koordinatensystem zu gewährleisten, sollten sie außerdem die Gestalt von Tensorgleichungen haben. Wir müssen deshalb untersuchen, ob und wie man Tensoren so differenzieren kann, daß das Ergebnis wieder ein Tensor ist.

*Partielle Ableitung.* Die gewöhnliche partielle Ableitung eines ortsabhängigen Tensors bezeichnen wir durch ein Komma:

$$\frac{\partial T^{ab\ldots}{}_{c\ldots}}{\partial x^i} = T^{ab\ldots}{}_{c\ldots,i}. \tag{5,1}$$

Die Komponenten $T^{ab\ldots}{}_{c\ldots,i}$ sind aber nicht die Komponenten eines Tensors, wie wir am Beispiel der Ableitung eines Vektors zeigen wollen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}(T^n{}_{,i})' &= \left(\frac{\partial T^n}{\partial x^i}\right)' = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\,(A^{n'}_n T^m) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,(A^{n'}_n T^n)\\ &= A^i_{i'} A^{n'}_n T^n{}_{,i} + A^i_{i'} A^{n'}_{n,i} T^n,\end{aligned} \tag{5,2}$$

d. h., die $T^n{}_{,i}$ transformieren sich nur dann wie die Komponenten eines Tensors, wenn die Transformationsmatrizen $A^{n'}_n$ ortsunabhängig sind (dies ist z. B. bei den Lorentz-Transformationen des Minkowski-Raumes erfüllt).

Eine Ausnahme bildet nur der verallgemeinerte Gradient $\varphi_{,a} = \partial\varphi/\partial x^a$ eines Skalars $\varphi$; seine Komponenten sind die eines kovarianten Vektors: Aus $\varphi' = \varphi$ folgt

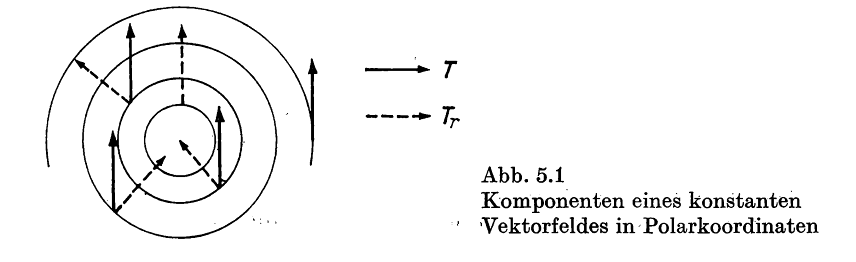



Abb. 5.1
Komponenten eines konstanten Vektorfeldes in Polarkoordinaten

wegen $\mathrm{d}\varphi' = \mathrm{d}\varphi$

$$\varphi_{,a}\,\mathrm{d}x^a = (\varphi_{,a})'\,\mathrm{d}x^{a'}, \tag{5,3}$$

und der Quotientensatz sichert die Vektoreigenschaft von $\varphi_{,a}$.

Den Grund dafür, daß die partiellen Ableitungen eines Tensors keinen Tensor bilden, erkennt man, wenn man in der Ebene ein konstantes Vektorfeld in Polarkoordinaten darstellt (Abb. 5.1.). Die Vektorkomponenten dieses konstanten Vektorfeldes werden ortsabhängig, weil sich die Richtung der Koordinatenlinien von Punkt zu Punkt ändert; nur in kartesischen Koordinatensystemen ist die partielle Ableitung der Vektorkomponenten ein Maß für die wirkliche Ortsabhängigkeit des Vektors.

*Definition der kovarianten Ableitung.* Diese letzten Überlegungen legen es nahe, aus der partiellen Ableitung eine kovariante zu machen (die aus Tensoren wieder Tensoren erzeugt), indem man sich der lokal geodätischen Koordinaten bedient und definiert:

Die kovariante Ableitung $T^{ab\ldots}_{mn\ldots;i}$ eines Tensors $T^{ab\ldots}_{mn\ldots}$ ist wieder ein Tensor und stimmt im lokal geodätischen Koordinatensystem mit der partiellen Ableitung überein:

$$T^{ab\ldots}_{mn\ldots;i} = T^{ab\ldots}_{mn\ldots,i} \quad \text{für} \quad g_{mn} = \eta_{mn}, \quad \Gamma^a_{bc} = 0. \tag{5,4}$$

Diese Definition der kovarianten Ableitung ist eindeutig. Sie sichert die Tensoreigenschaft und erleichtert eine Übertragung physikalischer Gesetze auf den Riemannschen Raum, wenn uns diese Gesetze im Minkowski-Raum (unter Benutzung partieller Ableitungen) bekannt sind.

*Eigenschaften und Rechenregeln der kovarianten Ableitung.* Da die partiellen Ableitungen von $\eta_{ab}$ und $\Delta^{abcd}$ Null sind, gelten die Gleichungen

$$g_{ab;m} = 0, \qquad \varepsilon^{abcd}{}_{;n} = 0. \tag{5,5}$$

Metrischer Tensor und $\varepsilon$-Tensor sind also kovariant konstant.

Da für die partielle Ableitung die Produkt- und die Summenregel gelten, gelten diese Regeln auch für die kovariante Ableitung:

$$(T^{ab} + S^{ab})_{;n} = T^{ab}{}_{;n} + S^{ab}{}_{;n}, \tag{5,6}$$

$$(T^{ab}S_c)_{;n} = T^{ab}{}_{,n}S_c + T^{ab}S_{c;n}. \tag{5,7}$$

Überschieben, Indexziehen, Verjüngen und Dualisieren beruhen auf dem Multiplizieren mit dem metrischen Tensor oder dem $\varepsilon$-Tensor. Diese Operationen sind deshalb mit der kovarianten Ableitung vertauschbar, z. B.

$$(T^a{}_a)_{;n} = T^{ab}{}_{;n}g_{ab} = (T^a{}_a)_{,n}. \tag{5,8}$$

Die kovariante Ableitung eines Skalars ist gleich seiner partiellen Ableitung, wie oben gezeigt wurde.

Für praktische Rechnungen brauchen wir natürlich auch eine Vorschrift zur Bestimmung der kovarianten Ableitung in einem vorgegebenen Koordinatensystem — wir wollen ja nicht jedesmal erst in das lokalgeodätische System transformieren, die partielle Ableitung berechnen und dann zurücktransformieren. Wir geben diese Vorschrift an, ohne sie abzuleiten, zeigen dann aber ihre Übereinstimmung mit der Definition der kovarianten Ableitung.

Die kovarianten Ableitungen der kontravarianten bzw. kovarianten Komponenten eines Vektors sind nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} T^a{}_{;n} &= T^a{}_{,n} + \Gamma^a_{nm} T^m, \\ T_{a;n} &= T_{a,n} - \Gamma^m_{an} T_m \end{aligned} \tag{5,9}$$

zu berechnen, die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensors, indem man die Vorschrift (5,9) auf jeden kontra- bzw. kovarianten Index anwendet, z. B.

$$T^a{}_{bc;d} = T^a{}_{bc,d} + \Gamma^a_{dm} T^m{}_{bc} - \Gamma^m_{bd} T^a{}_{mc} - \Gamma^m_{cd} T^a{}_{bm}. \tag{5,10}$$

Im lokal geodätischen System verschwinden alle Christoffel-Symbole, so daß dort kovariante und partielle Ableitung übereinstimmen. Die Vorschrift (5,9) erzeugt auch wirklich einen Tensor, obwohl die beiden Anteile auf der rechten Seite jeder für sich keine Tensoren sind. Mit (5,2) und (3,23) folgt nämlich

$$\begin{aligned} T({}^a{}_{;n})' &= \frac{\partial T^{a'}}{\partial x^{n'}} + \Gamma^{a'}_{n'm'} T^{m'} \\ &= A^{a'}_a A^n_{n'} T^a{}_{,n} + A^n_{n'} A^{a'}_{a,n} T^a + A^{a'}_a A^n_{n'} A^m_{m'} \Gamma^a_{nm} A^{m'}_b T^b \\ &\quad - A^{a'}_{n,m} A^n_{n'} A^m_{m'} A^{m'}_b T^b \\ &= A^{a'}_a A^n_{n'} (T^a{}_{,n} + \Gamma^a_{nm} T^m) + A^n_{n'} (A^{a'}_{a,n} - A^{a'}_{n,a})\, T^a, \end{aligned}$$

und wegen

$$A^{a'}_{a,n} = \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^n \partial x^a} = \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^a \partial x^n}\, A^{a'}_{n,a} \tag{5,11}$$

erhalten wir endgültig das behauptete Transformationsgesetz eines Tensors:

$$(T^a{}_{;n})' = A^{a'}_a A^n_{n'} T^a{}_{;n}. \tag{5,12}$$

Analog hätten wir (5,10) nachzuprüfen.

Obwohl die kovariante Ableitung immer einen kovarianten Index erzeugt, verwendet man auch die Schreibweise $T^{ab;n}$ als Abkürzung für

$$T^{ab;n} = g^{ni} T^{ab}{}_{;i}. \tag{5,13}$$

## 5.2. Kovariantes Differential und Parallelität im Kleinen

Es gibt eine anschauliche geometrische Deutung der kovarianten Ableitung, die wir im folgenden darstellen wollen. Die kovariante Ableitung kann man — wie die partielle — als Grenzwert eines Differenzenquotienten auffassen. Man bildet dabei jedoch nicht einfach die Differenz der Werte der Tensorkomponenten in den Punkten $x^i$ und $x^i + \mathrm{d}x^i$:

$$\mathrm{d}T^a = T^a(x^i + \mathrm{d}x^i) - T^a(x^i) = T^a{}_{,i}\, \mathrm{d}x^i \tag{5,14}$$

(dies würde der partiellen Ableitung entsprechen), sondern benutzt

$$\mathrm{D}T^a = \mathrm{d}T^a + \Gamma^a_{nm} T^n\, \mathrm{d}x^m = (T^a{}_{,m} + \Gamma^a_{nm} T^n)\, \mathrm{d}x^m. \tag{5,15}$$

Der tiefere Grund für diese kompliziertere Vorschrift liegt darin, daß Tensoren in zwei verschiedenen Punkten $x^i$ und $x^i + \mathrm{d}x^i$ verschiedenes Transformationsverhalten haben, ihre Differenz also keinen Tensor gibt. Man muß deshalb vor der Differenzbildung den Tensor vom Punkt $x^i + \mathrm{d}x^i$ erst in geeigneter Weise (unter Beibehaltung der Tensoreigenschaft) in den Punkt $x^i$ transportieren, natürlich ohne ihn beim Transport zu verändern. In unserem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum würden wir „ohne ihn zu verändern" durch „parallel zu sich selbst" übersetzen. Wir übernehmen diese Sprechweise, müssen uns aber darüber im klaren sein, daß die Begriffe „Parallelität in verschiedenen Punkten" und „Paralleltransport" in einem nichteuklidischen Raum durchaus nicht selbstverständlich sind.

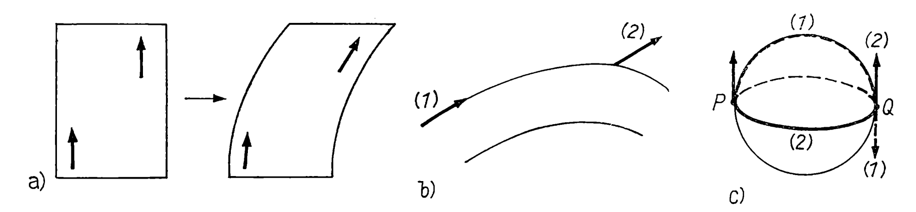



Abb. 5.2
Parallelität von Vektoren auf Flächen

Drei einfache Beispiele mögen dies erläutern (Abb. 5.2). a) Sind zwei Vektoren in einem Ebenenstück auch noch nach Verbiegung der Ebene parallel? b) Sind die beiden Vektoren, die im dreidimensionalen Raum parallel sind, dies auch in der gekrümmten Fläche? (Offensichtlich nicht, denn Vektoren *in* der Fläche können nur 2 Komponenten haben, der Vektor (2) ragt aber aus der Fläche heraus und hat drei Komponenten — oder sollte man vielleicht die Projektion auf die Fläche nehmen?) c) Welcher der beiden Vektoren im Punkt $Q$ der Kugel der Abb. 5.2c ist dem im Punkt $P$ parallel? *Beide* wurden anschaulich parallel transportiert, der eine auf dem Äquator stets senkrecht und der andere über den Pol stets parallel zur Verbindungskurve von $P$ und $Q$!

Die Erkenntnis, die diese Beispiele vermitteln sollen, lautet: In einem gekrümmten Raum muß man *definieren*, was man unter Parallelität und Parallelverschiebung versteht. Die bei der Bildung der kovarianten Ableitung offensichtlich benutzte Definition lautet: Zwei Vektoren in infinitesimal benachbarten Punkten sind genau dann parallel, wenn

$$\mathrm{D}T^a = \mathrm{d}T^a + \Gamma^a_{nm} T^n \,\mathrm{d}x^m = 0 \tag{5,16}$$

gilt, also ihr kovariantes Differential verschwindet. Ein Vektorfeld ist in der (infinitesimalen) Umgebung eines Punktes parallel, wenn dort seine kovariante Ableitung Null ist:

$$T^a{}_{;n} = T^a{}_{,n} + \Gamma^a_{nm} T^m = 0. \tag{5,17}$$

In einem allgemeinen affinen (also eventuell sogar nichtriemannschen) gekrümmten Raum würde man auch diese Definitionen verwenden, die $\Gamma^a_{nm}$ wären dann aber beliebige Funktionen. Ein Riemannscher Raum ist dadurch ausgezeichnet, daß die $\Gamma^a_{nm}$ gerade die aus dem metrischen Tensor gebildeten Christoffel-Symbole sind.

Natürlich sind die Definitionen (5,16) und (5,17) gerade so eingerichtet, daß sie im lokalen geodätischen System auf die übliche Parallelverschiebung im Minkowski-Raum führen.

## 5.3. Parallelverschiebung längs einer Kurve und Parallelpropagator

In unserem Riemannschen Raum sei eine beliebige Kurve in der Parameterdarstellung $x^n = x^n(\lambda)$ gegeben. Es ist dann stets möglich, aus der Forderung, daß das kovariante Differential eines Vektors längs dieser Kurve verschwindet, also aus

$$\frac{\mathrm{D}T^a}{\mathrm{D}\lambda} \equiv \frac{T^a{}_{;n}\,\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}T^a}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^a_{nm}T^m\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \tag{5,18}$$

ein längs dieser Kurve paralleles Vektorfeld zu konstruieren. Man kann ja den Wert der Vektorkomponenten $T^a$ in einem Anfangspunkt $\lambda = \bar{\lambda}$ beliebig vorgeben und aus dem Differentialgleichungssystem (5,18) den Vektor in einem beliebigen anderen Punkt $\lambda$ der Kurve eindeutig bestimmen.

Ein Beispiel einer solchen Gleichung, die den Paralleltransport eines Vektors zum Ausdruck bringt, ist offensichtlich die Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^a_{nm}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{5,19}$$

Sie sagt aus, daß der Tangentenvektor $t^a = \mathrm{d}x^a/\mathrm{d}\lambda$ einer Geodäten parallel zu sich selbst bleibt: Die Geodäte ist also nicht nur die kürzeste, sondern auch die geradeste Verbindung zweier Punkte. Auch die Gerade im Euklidischen Raum hat diese beiden Eigenschaften.

Wenn man das Auftreten konjugierter Punkte ausschließt (solche Schnittpunkte von Geodäten, die von einem Punkt ausgehen, treten z. B. auf einer Kugel auf: alle vom Nordpol ausgehenden Großkreise schneiden einander im Südpol), gibt es zwischen zwei Punkten genau eine Geodäte. Das Ergebnis des Paralleltransports eines Vektors (oder Tensors) vom Punkt $\bar{P}$ zum Punkt $P$ *längs einer Geodäten* ist also eindeutig bestimmt, während es im allgemeinen von der Wahl des Weges abhängt (vgl. Abschnitt 6.2.). Da die zu integrierende Differentialgleichung (5,18) linear in den Komponenten des zu transportierenden Vektors $T^a$ ist, sind die Vektorkomponenten im Punkt $P$ lineare Funktionen der Komponenten im Punkt $\bar{P}$:

$$T_a(P) = g_{a\bar{b}}(P, \bar{P})\, T^{\bar{b}}(\bar{P}). \tag{5,20}$$

Analog gilt für Tensorkomponenten

$$T_a{}^b{}_{n\ldots} = g_{a\bar{a}}g^{b\bar{b}}g_{n\bar{n}}\ldots T^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}{}^{\bar{n}\ldots}. \tag{5,21}$$

Die Größen $g_{a\bar{b}}$ sind die Komponenten des *Parallelpropagators.* Er ist ein Zweipunkttensor [vgl. (4,19)]; die Indizes (gequert oder nicht) eines Tensors geben gleichzeitig an, von den Koordinaten welcher Punkte er abhängt. Da beim Paralleltransport die Länge eines Vektors konstant bleibt, ist der Parallelpropagator symmetrisch:

$$g_{a\bar{b}} = g_{\bar{b}a}, \tag{5,22}$$

und offensichtlich muß

$$g_{a\bar{b}}(P, P) = g_{ab}(P) \tag{5,23}$$

gelten.

### 5.4. Fermi-Walker-Transport

Die Parallelverschiebung eines Vektors scheint die natürlichste Weise zu sein, Vektoren an zwei verschiedenen Raumpunkten miteinander zu vergleichen oder von einem zum anderen Punkt zu transportieren. Es gibt jedoch physikalisch wichtige Fälle, in denen eine andere Art des Transports bei der Formulierung physikalischer Gesetze zweckmäßiger ist.

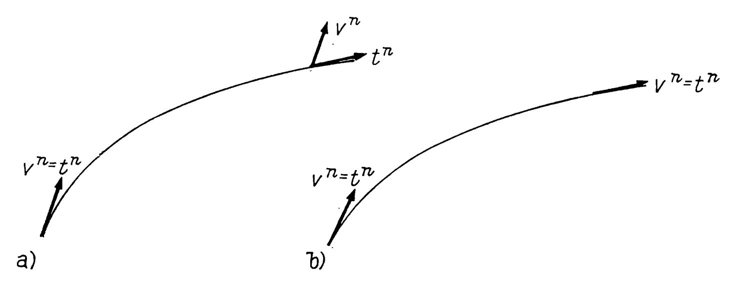



Abb. 5.3
Paralleltransport (a) und Fermi-Walter-Transport (b) des Vektors $v^n$

Ein Beobachter, der sich unter der Wirkung von Kräften auf einer beliebigen zeitartigen Raumkurve $x^n(\tau)$ bewegt, wird ein (lokales) Koordinatensystem als natürlich ansehen und benutzen, in dem er selbst ruht und dessen räumliche Achsen nicht rotieren. Er wird also gewissermaßen ein Tetradensystem mit sich führen, dessen zeitartiger Vektor stets in die Tangentenrichtung $t^n = \mathrm{d}x^n/\mathrm{d}\tau$ seiner Bahnkurve zeigt, da nur dann die Vierergeschwindigkeit des Beobachters keine räumliche Komponente hat (er wirklich ruht), und er wird einen Vektor, dessen Komponenten bezüglich dieses Koordinatensystems sich nicht ändern, als konstant ansehen.

Die Tatsache, daß sich insbesondere der Tangentenvektor der eigenen Bahnkurve für den Beobachter nicht ändert, kann jedoch nicht dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß er längs der Bahnkurve parallel transportiert wird: Der Beobachter bewegt sich ja nicht auf einer Geodäten, und deshalb wird ein anfangs in Bewegungsrichtung zeigender Vektor $v^n$ bei Paralleltransport später einen Winkel mit der Weltlinie bilden (vgl. Abb. 5.3).

Benutzt man jedoch den für jeden Vektor $T^n$ durch das Verschwinden der *Fermi-Ableitung*, d. h. durch

$$\frac{\mathrm{D}T^n}{\mathrm{D}\tau} - T_a \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}^2x^a}{\mathrm{D}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}^2x^n}{\mathrm{D}\tau^2}\right) = 0, \tag{5,24}$$

definierten *Fermi-Walker-Transport,* dann kann man feststellen, daß in der Tat der Tangentenvektor $t^n$ einer beliebigen zeitartigen Raumkurve nach Fermi-Walker

transportiert wird, da (5,24) für $T^n = t^n$ wegen der aus $\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}x_n = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$ folgenden Beziehung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0 = 2\,\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{D}^2x^n}{\mathrm{D}\tau^2} \tag{5,25}$$

identisch erfüllt ist. Bewegt sich der Beobachter auf einer Geodäten $\mathrm{D}^2x^n/\mathrm{D}\tau^2 = 0$, fallen Paralleltransport und Fermi-Walker-Transport zusammen.

Die Gl. (5,24) ist so zu lesen, daß durch sie bei vorgegebener Raumkurve $x^n(\tau)$ definiert wird, wie aus den Anfangswerten eines Vektors $T^n$ die Änderung des Vektors beim Fortschreiten längs der Kurve zu berechnen ist. Der Leser mag bestätigen, daß sich Skalarprodukte von Vektoren bei dieser Art des Transports nicht ändern, also Längen und Winkel erhalten bleiben.

Ein nach Fermi-Walker transportiertes Tetradensystem ist die beste Annäherung an das Koordinatensystem eines Beobachters, der lokal ein im Sinne der Newtonschen Mechanik nichtrotierendes Inertialsystem benutzt (vgl. Abschnitt 8.2.).

## 5.5. Lie-Ableitung

Wenn in einem Raum eine Schar von Weltlinien (Kurven) vorhanden ist, die den Raum schlicht und vollständig überdecken, spricht man von einer Weltlinienkongruenz; solche Kurven können z. B. die Weltlinien von Flüssigkeitsteilchen sein. Jeder solchen Kongruenz ist ein Vektorfeld $a^n(x^i)$ zugeordnet, das jeweils die Richtung der Tangente der durch diesen Punkt gehenden Kurve hat.

Gegeben sei außerdem ein Vektorfeld $T^n(x^i)$. Man kann nun die Frage stellen, wie man in invarianter (koordinatensystemunabhängiger) Weise die Änderung des Vektors $T^n$ bei Bewegung des Beobachters in Richtung des Vektorfeldes $a^n$ definieren kann. Natürlich wird man sofort an die Komponente $T^n{}_{;i}a^i$ der kovarianten Ableitung von $T^n$ in Richtung von $a^i$ denken. Es gibt jedoch noch eine zweite, von der kovarianten Ableitung unabhängige Art der Richtungsableitung, nämlich die Lie-Ableitung.

Diese Ableitung entspricht der Änderung, die ein Beobachter feststellt, der vom Punkt $P$ (Koordinaten $x^i$) in Richtung von $a^i$ in den infinitesimal benachbarten Punkt $\bar{P}$ (Koordinaten $\bar{x}^i = x^i + \varepsilon a^i(x^n)$) geht und dabei sein Koordinatensystem mitnimmt (vgl. Abb. 5.4). Wenn er im Punkt $\bar{P}$ aber das eigentlich für $P$ zuständige

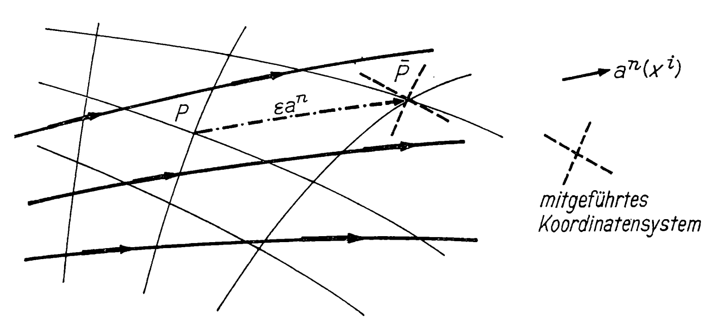



Abb. 5.4
Zur Definition der Lie-Ableitung

Koordinatensystem benutzt, entspricht dies einer Koordinatentransformation, die dem Punkt $\bar{P}$ die Koordinatenwerte des Punktes $P$ zuordnet, d. h. der Transformation

$$x^{n'} = x^n - \varepsilon a^n(x^i),$$
$$A_i^{n'} = \delta_i^n - \varepsilon a^n{}_{,i}. \tag{5,26}$$

Er wird also als Komponenten des Vektors $T^n$ im Punkt $\bar{P}$ die Größen

$$T^{n'}(\bar{P}) = A_i^{n'} T^i(x^k + \varepsilon a^k) = (\delta_i^n - \varepsilon a^n{}_{,i})\,[T^i(P) + \varepsilon T^i{}_{,k}(P)\,a^k]$$
$$= T^n(P) + \varepsilon T^n{}_{,k}(P)\,a^k - \varepsilon a^n{}_{,k} T^k(P) \tag{5,27}$$

ansehen (bei Vernachlässigung von Termen in $\varepsilon^2$) und mit $T^n(P)$ vergleichen.

Diese Überlegung führt dazu, als Lie-Ableitung in Richtung des Vektorfeldes $a^n$ den Grenzwert

$$\underset{a}{\pounds} T^n = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,[T^{n'}(\bar{P}) - T^n(P)] \tag{5,28}$$

oder den wegen (5,27) dazu gleichwertigen Ausdruck

$$\underset{a}{\pounds} T^n = T^n{}_{,k} a^k - T^k a^n{}_{,k} \tag{5,29}$$

zu definieren. Analog folgt für die Lie-Ableitung der kovarianten Komponenten $T_n$

$$\underset{a}{\pounds} T_n = T_{n,i} a^i + T_i a^i{}_{,n}. \tag{5,30}$$

Die Lie-Ableitung eines Tensors höherer Stufe bildet man, indem man (5,29) bzw. (5,30) auf jeden kontravarianten bzw. kovarianten Index sinngemäß überträgt, also z. B.

$$\underset{a}{\pounds} g_{mn} = g_{mn,i} a^i + g_{in} a^i{}_{,m} + g_{mi} a^i{}_{,n}. \tag{5,31}$$

Bei der Berechnung der Lie-Ableitung werden die Christoffel-Symbole nicht benutzt; man kann jedoch in (5,29) bis (5,31) nachträglich die partiellen Ableitungen durch die kovarianten gemäß (5,9) ersetzen und erhält

$$\underset{a}{\pounds} T^n = T^n{}_{;i} a^i - T^i a^n{}_{;i},$$
$$\underset{a}{\pounds} T_n = T_{n;i} a^i + T_i a^i{}_{;n}, \tag{5,32}$$
$$\underset{a}{\pounds} g_{mn} = a_{m;n} + a_{n;m}.$$

Dieses Ergebnis zeigt explizit, daß die Lie-Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor ist, obwohl bei ihrer Definition nur partielle Ableitungen benutzt wurden.

Die Lie-Ableitung von Tensoren hat folgende Eigenschaften, die wir ohne Beweis angeben wollen:

a) Sie erfüllt die Leibnizsche Produktregel.

b) Sie ist mit der Operation der Verjüngung vertauschbar (obwohl die Lie-Ableitung des metrischen Tensors nicht verschwindet).

c) Sie läßt sich auf beliebige lineare geometrische Objekte anwenden, z. B. auf Christoffel-Symbole.

d) Sie ist mit der partiellen Ableitung vertauschbar.

e) Sind die partiellen Ableitungen $a^i{}_{,n}$ Null, z. B. in einem mitbewegten Koordinatensystem $a^i = (0, 0, 0, 1)$, fallen Lie-Ableitung und übliche Richtungsableitung zusammen.

Die Lie-Ableitung spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Symmetrien Riemannscher Räume (vgl. Abschnitt 19.5.).

*Literatur zu Kapitel 5.:*

[7], [15], [16], [19], [77].

# 6. Der Krümmungstensor

## 6.1. Innere Geometrie und Krümmung

In den vorhergehenden Kapiteln dieses Buches haben wir schon häufig die Begriffe „Riemannscher Raum" oder „gekrümmter Raum" benutzt. Mit Ausnahme des Abschnitts 1.4. über die geodätische Abweichung hat es aber bisher nie eine Rolle gespielt, ob es sich nur um einen Minkowski-Raum mit komplizierten krummlinigen Koordinaten oder um einen wirklich gekrümmten Raum handelt. Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, wie man ein Maß für die Abweichung des Raumes von einem Minkowski-Raum gewinnen kann.

Wenn man das Wort „Krümmung" für diese Abweichung benutzt, hat man meistens das anschauliche Bild einer zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen Raum vor Augen, d. h., man beurteilt die Eigenschaften eines zweidimensionalen Raumes (der Fläche) vom Standpunkt eines höherdimensionalen flachen Raumes aus. Diese Betrachtungsweise ist bei einem vierdimensionalen Riemannschen Raum mathematisch zwar auch möglich — man könnte ihn als Hyperfläche in einem zehndimensionalen flachen Raum auffassen; dieser höherdimensionale Raum hat aber physikalisch keine Bedeutung und ist auch nicht einfacher vorstellbar oder erfaßbar als der vierdimensionale Riemannsche Raum. Wir müssen vielmehr die Eigenschaften unserer Raum-Zeit allein durch vierdimensionale Begriffe darstellen — wir müssen „innere Geometrie" betreiben. Im Bilde der zweidimensionalen Flächen müssen wir uns also wie zweidimensionale Lebewesen verhalten, denen die dritte Dimension körperlich und geistig unzugänglich ist und die Aussagen über die Geometrie ihrer Fläche allein durch Messungen auf der Fläche begründen können.

Solche Lebewesen könnten z. B. einen Zylinder- oder Kegelmantel, der ja aus einem Ebenenstück ohne Verzerrung entsteht, lokal (d. h. ohne um den Zylinder oder Kegel herum zu laufen und zum Ausgangspunkt zurückzukehren) nicht von einer Ebene unterscheiden. Sie könnten aber den Unterschied zwischen einer Ebene und einer Kugel dadurch feststellen, daß auf der Kugeloberfläche

a) die Parallelverschiebung eines Vektors wegabhängig ist (auf Weg 1 ist der Vektor Tangentenvektor einer Geodäten, auf dem Weg 2 stets senkrecht zum Tangentenvektor (vgl. Abb. 5.2c)).

b) die Winkelsumme eines von „Geraden" (Geodäten) begrenzten Dreiecks von 180° abweicht, z. B. 270° beträgt,

c) der Umfang eines Kreises (erzeugt, indem man von einem Punkt aus Geodäten zieht und auf ihnen eine konstante Strecke als Radius abträgt) vom $\pi$-fachen des Durchmessers abweicht,

d) der Abstand zwischen benachbarten Großkreisen nicht proportional zur zurückgelegten Strecke ist (vgl. geodätische Abweichung).

Wie eine detaillierte mathematische Analyse zeigt, führen diese vier Meßvorschriften und ihre sinngemäße Übertragung auf einen vierdimensionalen Raum alle auf den Begriff der Krümmung und den des Krümmungstensors. Wir werden diesen Tensor in den folgenden Abschnitten näher kennenlernen und dabei von der Untersuchung des Paralleltransports von Vektoren ausgehen.

## 6.2. Krümmungstensor und Fernparallelismus von Vektoren

Die kovariante Ableitung ermöglichte es uns, in (5,18) durch

$$T_{a;n}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}\lambda} - \Gamma^m_{an}T_m\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{6,1}$$

eine eindeutige Vorschrift zur Parallelverschiebung eines Vektors längs einer festen Kurve zu geben. Wenn das Ergebnis der Parallelverschiebung zwischen zwei Punkten *unabhängig* von der Wahl der Kurve ist, spricht man von Fernparallelismus. Notwendige Bedingung für seine Existenz ist offensichtlich die Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung schon im Infinitesimalen.

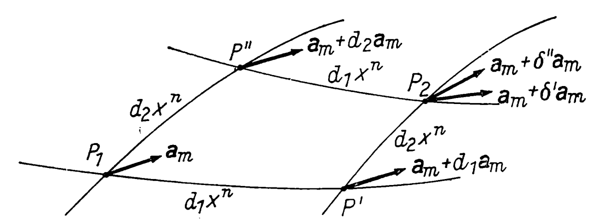



Abb. 6.1 Parallelverschiebung eines Vektors

Bei Anwendung der Vorschrift (6,1) auf die Parallelverschiebung des Vektors $a_m$ längs der Seiten des infinitesimalen Parallelogramms der Abb. 6.1 erhalten wir:

von $P_1$ nach $P'$:

$$\mathrm{d}_1a_m = \Gamma^i_{mn}a_i\,\mathrm{d}_1x^n,$$

von $P_1$ nach $P''$:

$$\mathrm{d}_2a_m = \Gamma^i_{mn}a_i\,\mathrm{d}_2x^n,$$

von $P_1$ über $P'$ nach $P_2$ (Christoffel-Symbole sind im Punkt $P'$ zu nehmen, deshalb $\Gamma^r_{mq,s}\,\mathrm{d}_1x^s$):

$$\begin{aligned}\delta'a_m &= (\Gamma^r_{mq} + \Gamma^r_{mq,s}\,\mathrm{d}_1x^s)\,(a_r + \mathrm{d}_1a_r)\,\mathrm{d}_2x^q + \mathrm{d}_1a_m\\ &\approx \Gamma^r_{mq}\Gamma^i_{rn}\,\mathrm{d}_2x^q\,\mathrm{d}_1x^na_i + \Gamma^r_{mq,s}a_r\,\mathrm{d}_1x^s\,\mathrm{d}_2x^q + \Gamma^i_{mn}a_i(\mathrm{d}_1x^n + \mathrm{d}_2x^n)\end{aligned}$$

von $P_1$ über $P''$ nach $P_2$ (Christoffel-Symbole sind im Punkt $P''$ zu nehmen):

$$\begin{aligned}\delta''a_m &= (\Gamma^r_{mq} + \Gamma^r_{mq,s}\,\mathrm{d}_2x^s)\,(a_r + \mathrm{d}_2a_r)\,\mathrm{d}_1x^q + \mathrm{d}_2a_m\\ &\approx \Gamma^r_{mq}\Gamma^i_{rn}\,\mathrm{d}_1x^q\,\mathrm{d}_2x^na_i + \Gamma^r_{mq,s}a_r\,\mathrm{d}_2x^s\,\mathrm{d}_1x^q + \Gamma^i_{mn}a_i(\mathrm{d}_1x^n + \mathrm{d}_2x^n).\end{aligned}$$

Die auf verschiedenen Wegen nach $P_2$ transportierten Vektoren differieren also um

$$\delta'' a_m - \delta' a_m = (-\Gamma^r_{mq,s} + \Gamma^r_{ms,q} + \Gamma^r_{nq}\Gamma^n_{ms} - \Gamma^r_{ns}\Gamma^n_{mq})\, a_r\, \mathrm{d}_1 x^s\, \mathrm{d}_2 x^q. \qquad (6,2)$$

Der Paralleltransport ist für alle Vektoren $a_r$ und alle möglichen infinitesimalen Parallelogramme ($\mathrm{d}_1 x^n$ und $\mathrm{d}_2 x^n$ beliebig) also nur dann vom Weg unabhängig, wenn der durch

$$R^r{}_{msq} = \Gamma^r_{mq,s} - \Gamma^r_{ms,q} + \Gamma^r_{ns}\Gamma^n_{mq} - \Gamma^r_{nq}\Gamma^n_{ms} \qquad (6,3)$$

definierte *Riemannsche Krümmungstensor* (*Riemann-Christoffel-Tensor*) verschwindet. Ist diese Bedingung erfüllt, kann man auch für *endliche* Abstände Fernparallelismus definieren: Der Paralleltransport wird wegunabhängig (wie man durch Zerlegung der von einer Kurve umschlossenen Fläche in infinitesimale Parallelogramme zeigen kann).

Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung ist die anschauliche Interpretation der Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors; es gilt ja für jeden beliebigen Vektor $a_m$

$$\begin{aligned} a_{m;s;q} &= a_{m;s,q} - \Gamma^r_{mq} a_{r;s} - \Gamma^r_{qs} a_{m;r} \\ &= a_{m,s,q} - \Gamma^s_{ms,q} a_r - \Gamma^r_{ms} a_{r,q} - \Gamma^r_{qm} a_{r,s} + \Gamma^n_{mq}\Gamma^r_{ns} a_r \\ &\quad - \Gamma^r_{qs} a_{m,r} + \Gamma^n_{qs}\Gamma^r_{mn} a_r, \end{aligned}$$

und nach Vertauschung von $q$ und $s$ erhalten wir hieraus unter Berücksichtigung von (6,3)

$$a_{m;s;q} - a_{m;q;s} = R^r{}_{msq} a_r. \qquad (6,4)$$

Kovariante Ableitungen sind genau dann vertauschbar, wenn der Krümmungstensor verschwindet. Man kann auch (6,4) als Definition des Krümmungstensors auffassen.

Die Rechtfertigung des Wortes *Krümmungs*tensor können wir darin sehen, daß er dann und nur dann verschwindet, wenn der Raum flach ist, wenn sich im ganzen Raum ein kartesisches Koordinatensystem einführen läßt. In kartesischen Koordinaten sind ja alle Christoffel-Symbole Null, der Krümmungstensor (6,3) verschwindet. Wenn er verschwindet, kann man andererseits durch (eindeutige) Parallelverschiebung von vier in einem Punkt orthogonalen Vektoren ein kartesisches Koordinatensystem im ganzen Raum erzeugen. Daß $R^r{}_{msq}$ wirklich ein *Tensor* ist, erkennt man am schnellsten an der Gl. (6,4).

Zusammenfassend können wir also folgende einander vollkommen gleichwertige Feststellungen treffen: Der durch (6,3) bzw. (6,4) definierte Krümmungstensor verschwindet genau dann, wenn a) der Raum flach ist, d. h. im ganzen Raum kartesische Koordinaten mit $g_{ab} = \eta_{ab}$ und $\Gamma^a_{bc} = 0$ eingeführt werden können, oder b) der Paralleltransport von Vektoren wegunabhängig ist oder c) kovariante Ableitungen vertauschbar sind oder d) die geodätische Abweichung (die Relativbeschleunigung) zweier beliebiger, sich kräftefrei bewegender Teilchen verschwindet (vgl. Abschnitt 1.4.).

### 6.3. Krümmungstensor und zweite Ableitungen des metrischen Tensors

Der Krümmungstensor (6,3) enthält Christoffel-Symbole und deren Ableitungen, also den metrischen Tensor und seine ersten und zweiten Ableitungen. Den Zusammenhang zwischen der Metrik und den Komponenten des Krümmungstensors wollen wir jetzt genauer untersuchen.

Wir führen dazu in einem lokal geodätischen Koordinatensystem

$$\bar{g}_{ab} = \eta_{ab}, \qquad \bar{\Gamma}^a_{bc} = 0 \qquad \text{für} \quad \bar{x}^n = 0 \tag{6,5}$$

eine Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x^n &= \bar{x}^n + \frac{1}{6} D^n{}_{pqr}\bar{x}^p\bar{x}^q\bar{x}^r, \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} &= A^n_i = \delta^n_i + \frac{1}{2} D^n{}_{pqi}\bar{x}^p\bar{x}^q \end{aligned} \tag{6,6}$$

durch, mit zunächst beliebigen, in den unteren Indizes symmetrischen Konstanten $D^n{}_{pqi}$. Diese Transformation ändert die Metrik und die Christoffel-Symbole im Punkt $x^n = \bar{x}^n = 0$ nicht, kann aber dazu dienen, die Ableitungen der Christoffel-Symbole zu vereinfachen. Wegen der allgemeinen Transformationsvorschrift (3,23) gilt ja

$$\Gamma^m_{ab,n} = (\bar{\Gamma}^r_{ik} A^m_r A^i_a A^k_b - A^m_{i,k} A^i_a A^k_b)_{,n}, \tag{6,7}$$

und im Punkt $\bar{x}^n = 0$ folgt hieraus wegen (6,6)

$$\Gamma^m_{ab,n} = \bar{\Gamma}^m_{ab,n} - D^m{}_{abn}. \tag{6,8}$$

Da die Koeffizienten $D^m{}_{abn}$ der Reihenentwicklung (6,6) symmetrisch in den drei unteren Indizes sind, die als vorgegeben anzusehenden Ableitungen $\bar{\Gamma}^m_{ab,n}$ der Christoffel-Symbole diese Symmetrieeigenschaft aber nicht immer besitzen, können nicht alle Ableitungen $\Gamma^m_{ab,n}$ zum Verschwinden gebracht werden. Man kann aber immer durch die Wahl

$$D^m{}_{abn} = \tfrac{1}{3}(\bar{\Gamma}^m_{ab,n} + \bar{\Gamma}^m_{na,b} + \bar{\Gamma}^m_{bn,a}) \tag{6,9}$$

erreichen, daß

$$\Gamma^m_{ab,n} + \Gamma^m_{na,b} + \Gamma^m_{bn,a} = 0 \tag{6,10}$$

gilt. Wenn in einem Punkt (6,10) und (6,5) erfüllt sind, spricht man von kanonischen Koordinaten.

In einem solchen kanonischen Koordinatensystem folgt aus (6,3) für die Komponenten des Krümmungstensors

$$R^r{}_{msq} = \Gamma^r_{mq,s} - \Gamma^r_{ms,q}, \tag{6,11}$$

also zusammen mit (6,10)

$$R^r{}_{msq} + R^r{}_{smq} = -3\Gamma^r_{ms,q}. \tag{6,12}$$

Aus der Definition der Christoffel-Symbole bzw. (3,11) folgt andererseits

$$g_{ia,bn} = g_{mi}\Gamma^m_{ab,n} + g_{ma}\Gamma^m_{ib,n}, \tag{6,13}$$

und (6,12) und (6,13) zusammen ergeben schließlich

$$g_{ia,bn} = -\tfrac{1}{3}(R_{iabn} + R_{iban} + R_{aibn} + R_{abin}). \tag{6,14}$$

Unter Vorgriff auf die Symmetrierelation (6,18) ist dies gleichwertig zu

$$g_{ia,bn} = -\tfrac{1}{3}(R_{iban} + R_{abin}). \tag{6,15}$$

Die Gln. (6,14) bzw. (6,15) gestatten eine bemerkenswerte Schlußfolgerung. Auf den ersten Blick sagen sie nur aus, daß in kanonischen Koordinaten die zweiten Ableitungen des metrischen Tensors aus den Komponenten des Krümmungstensors aufgebaut werden können. Da sich in kanonischen Koordinaten wegen (6,5) und (6,15) aber *alle* Tensoren, die sich aus der Metrik und ihren ersten und zweiten Ableitungen bilden lassen, durch den Krümmungstensor und den metrischen Tensor selbst ausdrücken lassen und diese Beziehung zwischen Tensoren koordinatenunabhängig sein muß, gilt der für spätere Anwendungen wichtige Satz: Alle Tensoren, die nur die Metrik und deren erste und zweite Ableitungen enthalten, lassen sich durch den Krümmungstensor und den metrischen Tensor ausdrücken.

Will man diesen Satz auf Pseudotensoren anwenden, muß man als zusätzliches Bauelement auch den $\varepsilon$-Tensor zulassen.

Kanonische Koordinaten (wie auch Riemannsche Normalkoordinaten) gestatten eine einfache geometrische Interpretation: Ihre Koordinatenlinien sind paarweise orthogonale Geodäten, und die Koordinaten eines beliebigen Punktes sind das Produkt der Richtungskosinus der vom Nullpunkt ausgehenden und zu dem Punkt führenden Geodäte mit dem Abstand längs dieser Geodäte.

## 6.4. Eigenschaften des Krümmungstensors

*Symmetrieeigenschaften.* Die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors können natürlich unmittelbar an der Definitionsgleichung (6,3) oder an

$$R_{amsq} = g_{ar}(\Gamma^r_{mq,s} - \Gamma^r_{ms,q} + \Gamma^r_{ns}\Gamma^n_{mq} - \Gamma^r_{nq}\Gamma^n_{ms}) \tag{6,16}$$

abgelesen werden. Sie sind aber im geodätischen Koordinatensystem, in dem die Christoffel-Symbole verschwinden und in dem aus (6,16)

$$R_{amsq} = (g_{ar}\Gamma^r_{mq})_{,s} - (g_{ar}\Gamma^r_{ms})_{,q}$$

und daraus schließlich

$$R_{amsq} = \tfrac{1}{2}(g_{aq,ms} + g_{ms,aq} - g_{as,mq} - g_{mq,as}) \tag{6,17}$$

folgt, schneller erkennbar. Wie man aus (6,17) unmittelbar ablesen kann, ist der Krümmungstensor antisymmetrisch bei Vertauschung des ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Index:

$$R_{amsq} = -R_{masq} = -R_{amqs} = R_{maqs}, \tag{6,18}$$

er ändert sich nicht bei Vertauschung des vorderen und des hinteren Indexpaares:

$$R_{amsq} = R_{sqam}, \tag{6,19}$$

und erfüllt außerdem noch die Relation

$$R_{a\langle msq\rangle} \equiv R_{amsq} + R_{asqm} + R_{aqms} = 0. \tag{6,20}$$

Die Gln. (6,18) besagen, daß man durch die Zuordnung (12) $\to$ 1, (23) $\to$ 2, (34) $\to$ 3, (41) $\to$ 4, (13) $\to$ 5, (24) $\to$ 6 die unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors $R_{amsq}$ auf eine $6\times 6$-Matrix $R_{AB}$ abbilden kann. Wegen (6,19) ist diese Matrix symmetrisch, hat also höchstens $\binom{7}{2} = 21$ verschiedene Komponenten. Der Zyklus (6,20) ist nur dann von (6,18) und (6,19) unabhängig (d. h. nicht trivial erfüllt), wenn

alle vier Indizes des Krümmungstensors verschieden sind: (6,20) gibt nur *eine* zusätzliche Gleichung. Das Ergebnis dieser Abzählung ist also: In einem vierdimensionalen Raum hat die Riemannsche Krümmungstensor maximal 20 algebraisch unabhängige Komponenten. Man kann zeigen, daß es in einem N-dimensionalen Raum genau $N^2(N^2-1)/12$ unabhängige Komponenten gibt.

*Ricci-Tensor, Krümmungsskalar und Weyl-Tensor.* Wegen der Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors gibt es (bis auf das Vorzeichen) nur einen durch Verjüngung aus ihm konstruierbaren Tensor, den *Ricci-Tensor*

$$R_{mq} = R^a{}_{maq} = -R^a{}_{mqa}. \tag{6,21}$$

Er ist symmetrisch, hat also 10 verschiedene Komponenten. Seine Spur

$$R = R^m{}_m \tag{6,22}$$

bezeichnet man als *Krümmungsskalar* $R$.

Analog der Zerlegung (4,42) eines symmetrischen Tensors in einen spurfreien Anteil und einen Term proportional zum metrischen Tensor ist die Zerlegung des Krümmungstensors in den *Weyl-Tensor* (oder konformen Krümmungstensor) $C^{am}{}_{sq}$ und Teile, in die Ricci-Tensor und Krümmungsskalar eingehen:

$$\begin{aligned} R^{am}{}_{sq} = C^{am}{}_{sq} &+ \tfrac{1}{2}\left(g^a_s R^m_q + g^m_q R^a_s - g^m_s R^a_q - g^a_q R^m_s\right) \\ &- \tfrac{1}{6}\left(g^a_s g^m_q - g^a_q g^m_s\right) R. \end{aligned} \tag{6,23}$$

Der durch (6,23) definierte Weyl-Tensor ist „spurfrei“:

$$C^{am}{}_{aq} = 0, \tag{6,24}$$

und hat alle Symmetrieeigenschaften des vollen Krümmungstensors. Der Name konformer Krümmungstensor oder Konformtensor rührt daher, daß zwei verschiedene Riemannsche Räume mit den metrischen Fundamentalformen $\mathrm{d}\bar{s}^2$ und $\mathrm{d}s^2$, die konform äquivalent sind,

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = M^2(x^i)\,\mathrm{d}s^2 \tag{6,25}$$

(alle Längen werden unabhängig von der Richtung mit dem ortsabhängigen Konformfaktor $M^2$ multipliziert), den gleichen Konformtensor haben, obwohl ihre Krümmungstensoren verschieden sind.

Wir können also zusammenfassend folgendes feststellen: In jedem Punkt eines vierdimensionalen Riemannschen Raumes sind von den 100 möglichen verschiedenen zweiten Ableitungen des metrischen Tensors nur 20 nicht durch Koordinatentransformationen eliminierbar; ihnen entsprechen die 20 algebraisch unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors. Diese 20 Komponenten lassen sich, wie (6,23) zeigt, durch die jeweils 10 Komponenten des Ricci-Tensors und des Weyl-Tensors ausdrücken.

Im dreidimensionalen Raum hat der Krümmungstensor nur 6 unabhängige Komponenten, genausoviel wie der Ricci-Tensor, und der Krümmungstensor läßt sich durch den Ricci-Tensor ausdrücken:

$$R^{\alpha\mu}{}_{\sigma\tau} = \left(g^\alpha_\sigma R^\mu_\tau + g^\mu_\tau R^\alpha_\sigma - g^\mu_\sigma R^\alpha_\tau - g^\alpha_\tau R^\mu_\sigma\right) - \tfrac{1}{2} R\left(g^\alpha_\sigma g^\mu_\tau - g^\alpha_\tau g^\mu_\sigma\right). \tag{6,26}$$

Auf einer zweidimensionalen Fläche hat der Krümmungstensor nur eine wesentliche Komponente, den Krümmungsskalar $R$:

$$R^{AM}{}_{ST} = R(g^A_S g^M_T - g^A_T g^M_S). \tag{6,27}$$

[vgl. (1,38)].

*Bianchi-Identitäten.* Bisher haben wir uns immer die Metrik vorgegeben gedacht und aus ihr den Krümmungstensor abgeleitet. Man kann sich umgekehrt auch die Frage stellen, ob man den Krümmungstensor (natürlich mit den richtigen Symmetrieeigenschaften) als beliebige Ortsfunktion vorgeben und die dazu gehörende Metrik bestimmen kann. Die Antwort auf diese zunächst rein mathematische Frage wird uns eine weitere Eigenschaft des Riemann-Tensors zeigen, die für die Gravitationstheorie außerordentlich wichtig ist.

Vorgabe des Krümmungstensors und Bestimmung der Metrik laufen wegen (6,17) auf das Lösen eines Systems von 20 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die 10 metrischen Funktionen $g_{ab}$ hinaus. Im allgemeinen wird ein solches System gar keine Lösungen besitzen: Nicht zu jedem Tensor mit den algebraischen Eigenschaften des Krümmungstensors gibt es eine Metrik, deren Krümmungstensor er ist. Es müssen vielmehr zusätzliche Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein. Obwohl die Gl. (6,15) nur in einem Punkt gilt und deshalb nicht differenziert werden darf, kann man an ihr den Kern der Integrabilitätsbedingungen erkennen: Da die dritten partiellen Ableitungen der Metrik vertauschbar sind, müssen Beziehungen zwischen den Ableitungen der Komponenten des Krümmungstensors bestehen.

Zur Aufstellung dieser Beziehungen schreiben wir die kovariante Ableitung des Krümmungstensors

$$R_{amsq;i} = g_{ar}(\Gamma^r_{mq,s} - \Gamma^r_{ms,q} + \Gamma^r_{ns}\Gamma^n_{mq} - \Gamma^r_{nq}\Gamma^n_{ms})_{;i} \tag{6,28}$$

in lokal geodätischen Koordinaten auf. Da in diesen Koordinaten die Christoffel-Symbole verschwinden, kann man rechts die kovariante Ableitung durch die partielle ersetzen und die Produkte der Christoffel-Symbole weglassen:

$$R_{amsq;i} = g_{ar}(\Gamma^r_{mq,si} - \Gamma^r_{ms,qi}).$$

Addieren wir zu dieser Gleichung die durch Indexvertauschung entstehenden beiden Gleichungen

$$R_{amqi;s} = g_{ar}(\Gamma^r_{mi,sq} - \Gamma^r_{mq,is}),$$

$$R_{amis;q} = g_{ar}(\Gamma^r_{ms,iq} - \Gamma^r_{mi,sq}),$$

so erhalten wir die *Bianchi-Identitäten*

$$R_{am\langle is;q\rangle} = R_{amis;q} + R_{amsq;i} + R_{amqi;s} = 0. \tag{6,29}$$

Diese Gleichungen muß jeder Krümmungstensor erfüllen; gelten sie, kann man zu vorgegebenem Krümmungstensor die Metrik bestimmen, und drückt man umgekehrt den Krümmungstensor durch die Metrik aus, sind sie identisch erfüllt. Viele dieser Gleichungen sind allein auf Grund der Symmetrieeigenschaften (6,18)—(6,20) identisch erfüllt, z. B. wenn die Indizes $isq$ nicht verschieden sind; im vierdimensionalen Raum sind nur 20 nicht trivial.

Durch Verjüngung lassen sich aus ihnen Identitäten für den Ricci-Tensor ableiten.

Es gilt

$$g^{aq}R_{am\langle is;q\rangle} = R^{a}{}_{mis;a} - R_{ms;i} + R_{mi;s} = 0\,,$$

$$g^{ms}g^{aq}R_{am\langle is;q\rangle} = R^{a}{}_{i;a} - R_{,i} + R^{a}{}_{i;a} = 0\,,$$

also

$$(R^{ai} - \tfrac{1}{2}\, g^{ai}R)_{;i} = 0\,. \tag{6,30}$$

Zum Schluß dieses Abschnittes über Eigenschaften des Krümmungstensors möchten wir noch darauf hinweisen, daß in der Literatur unterschiedliche Vorzeichenkonventionen angetroffen werden: Im Vergleich zu unseren Definitionen kann der Riemann-Tensor ein anderes Vorzeichen haben, und der Ricci-Tensor kann durch Verjüngung über ein anderes Indexpaar entstehen und so ebenfalls sein Vorzeichen ändern. Es wird empfohlen, bei der Lektüre eines Buches oder einer Arbeit die dort benutzten Konventionen herauszuschreiben, um beim Vergleich mit diesem Buch oder anderen Veröffentlichungen Fehler zu vermeiden.

*Literatur zu Kapitel 6.:*

[7], [15], [16], [19].

# 7. Differentialoperatoren, Integrale und Integralsätze

## 7.1. Aufgabenstellung

Bei der Formulierung physikalischer Gesetze im dreidimensionalen flachen Raum benutzt man gern die Vektoroperatoren div, grad, rot und $\Delta = \text{div grad}$, die in kartesischen Koordinaten auch auf Tensorkomponenten angewandt werden können. Sie erfüllen die Identitäten

$$\text{div rot} = 0, \qquad \text{rot grad} = 0 \tag{7,1}$$

und ermöglichen wegen der Integralsätze

$$\int \text{div}\, \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} \qquad \text{(Gauss)} \tag{7,2}$$

und

$$\int \text{rot}\, \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \oint \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{(Stokes)} \tag{7,3}$$

eine integrale Formulierung physikalischer Aussagen, z. B. in der Elektrodynamik. Die Integralsätze lassen sich ebenfalls auf Tensoren höherer Stufe anwenden.

Während sich die Differentialoperatoren relativ leicht auf einen vierdimensionalen gekrümmten Raum übertragen lassen, stoßen wir bei der Verallgemeinerung der Integralsätze auf Schwierigkeiten. Eine Ursache liegt darin, daß — wenn das Ergebnis wieder ein Tensor sein soll — niemals Integrale über Tensorkomponenten, sondern nur Integrale über Skalare gebildet werden dürfen. Eine zweite Ursache ist der Umstand, daß die Umkehrung einer Integration eigentlich die partielle Differentiation ist, wir aber die kovariante Ableitung bei Tensorgleichungen zu bevorzugen haben;

aus diesem Grund werden wir besonders an solchen Differentialoperatoren interessiert sein, die kovariant sind und sich doch leicht durch partielle Ableitungen ausdrücken lassen.

Die Übersichtlichkeit der Rechnungen wird noch zusätzlich erschwert durch die komplizierte Art, in der wir in kovarianter Form Volumen- und Flächenelemente schreiben werden. Bei Verwendung des Kalküls der Differentialformen ließe sich hier zwar Abhilfe schaffen, für konkrete Rechnungen ist der Gewinn aber gering.

## 7.2. Wichtige Differentialoperatoren

Der verallgemeinerte Gradient ist die kovariante Ableitung; für einen Skalar stimmen kovariante und partielle Ableitung überein:

$$\varphi_{;a} = \varphi_{,a}. \tag{7,4}$$

Die verallgemeinerte Rotation eines Vektors $A_m$ ist der antisymmetrische Teil des Tensors $A_{n;m}$:

$$A_{n;m} - A_{m;n} = A_{n,m} - A_{m,n} - \Gamma^a_{nm} A_a + \Gamma^a_{mn} A_a.$$

Wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes kann man in ihm die kovariante durch die partielle Ableitung ersetzen:

$$A_{n;m} - A_{m;n} = A_{n,m} - A_{m,n}. \tag{7,5}$$

Die verallgemeinerte Divergenz erhält man durch Verjüngung bezüglich eines Index, nach dem kovariant abgeleitet wurde. Wegen der Beziehung (3,14) $-\Gamma^a_{ab} = (\ln\sqrt{-g})_{,b}$ — gilt für einen Vektor

$$B^n{}_{;n} = B^n{}_{,n} + \Gamma^n_{na} B^a = B^n{}_{,n} + (\ln\sqrt{-g})_{,a} B^a,$$

also

$$B^n{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(B^n \sqrt{-g}\right)_{,n}. \tag{7,6}$$

Für einen antisymmetrischen Tensor $F_{ab} = -F_{ba}$ gilt wegen der Symmetrieeigenschaft der Christoffel-Symbole

$$F^{ab}{}_{;b} = F^{ab}{}_{,b} + \Gamma^a_{bm} F^{mb} + \Gamma^b_{bm} F^{am} = F^{ab}{}_{,b} + (\ln\sqrt{-g})_{,m} F^{am};$$

auch seine Divergenz läßt sich wie die eines Vektors durch die partielle Ableitung ausdrücken:

$$F^{ab}{}_{;b} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, F^{ab}\right)_{,b}. \tag{7,7}$$

Analog gilt für jeden vollständig antisymmetrischen Tensor

$$F^{[mn\ldots ab]}{}_{;b} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, F^{[mn\ldots ab]}\right)_{,b}. \tag{7,8}$$

Für die Divergenz eines symmetrischen Tensors gibt es keine ähnlich einfache Darstellung.

Der verallgemeinerte $\Delta$-Operator wird aus div und grad gebildet; aus (7,4) und (7,6) folgt

$$\Delta\varphi = \varphi^{,n}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\, g^{na}\varphi_{,a}\right)_{,n}. \tag{7,9}$$

### 7.3. Volumen-, Flächen-, Kurvenintegrale

In einem $N$-dimensionalen ($N \leqq 4$) Raum wird ein $s$-dimensionales Hyperflächenelement ($s \leqq N$) durch $s$ infinitesimale Vektoren $\mathrm{d}_1x^n, \mathrm{d}_2x^n, \ldots, \mathrm{d}_sx^n$ aufgespannt, die linear unabhängig sind und nicht unbedingt in Richtung der Koordinatenachsen zeigen müssen (vgl. Abb. 7.1).

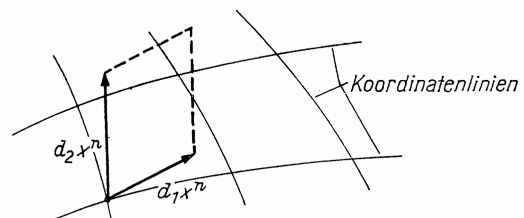



Abb. 7.1
Flächenelement

Unter Benutzung des verallgemeinerten Kronecker-Symbols $\delta^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_s}$, das antisymmetrisch in allen oberen bzw. unteren Indizes ist und für $n_i = m_i$ (falls diese Zahlen alle verschieden sind) den Wert 1 annimmt,

$$\delta^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_s} = \delta^{[n_1\ldots n_s]}_{m_1\ldots m_s} = \delta^{n_1\ldots n_s}_{[m_1\ldots m_s]}, \qquad \delta^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_s} = 1 \quad \text{für} \quad n_i = m_i, \tag{7,10}$$

definieren wir als Hyperflächen- (Volumen-) Element das Gebilde

$$\mathrm{d}V^{n_1\ldots n_s} = \delta^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_s}\,\mathrm{d}_1x^{m_1}\ldots\mathrm{d}_sx^{m_s}. \tag{7,11}$$

Wie man sich überlegen und an den Beispielen verifizieren kann, handelt es sich um einen Tensor, der in allen Indizes antisymmetrisch ist. Seine Komponenten werden besonders einfach, wenn die $\mathrm{d}_ix^n$ in Richtung der Koordinatenachsen zeigen, also

$$\mathrm{d}_1x^n = (\mathrm{d}x^1, 0, 0, \ldots), \qquad \mathrm{d}_2x^n = (0, \mathrm{d}x^2, 0, \ldots) \text{ usw.} \tag{7,12}$$

gilt.

Für $s = 1$ definiert (7,11) einfach das Kurvenelement

$$\mathrm{d}V^n = \mathrm{d}x^n, \tag{7,13}$$

für $s = 2$ ist das Hyperflächenelement wegen

$$\delta^{n_1n_2}_{m_1m_2} = \delta^{n_1}_{m_1}\delta^{n_2}_{m_2} - \delta^{n_1}_{m_2}\delta^{n_2}_{m_1} \tag{7,14}$$

in einfacher Weise dem Flächenelement $\mathrm{d}_1\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}_2\boldsymbol{r}$ zugeordnet:

$$\mathrm{d}V^{n_1n_2} = \mathrm{d}_1x^{n_1}\,\mathrm{d}_2x^{n_2} - \mathrm{d}_1x^{n_2}\,\mathrm{d}_2x^{n_1}, \tag{7,15}$$

und für $s = N$ hat es für die Differentiale (7,12) als wesentliche Komponente

$$\mathrm{d}V^{12\ldots N} = \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\ldots\mathrm{d}x^N. \tag{7,16}$$

Da wir prinzipiell nur über Skalare integrieren können, wenn wir die Tensoreigenschaft des Integrals fordern, müssen wir das Hyperflächenelement mit einem Tensor jeweils gleicher Stufe überschieben. Erlaubt sind also nur Integrale der Form

$$\int_{G_s} T_{n_1 \dots n_s} \, \mathrm{d}V^{n_1 \dots n_s} = I_s, \qquad s \leqq N. \tag{7,17}$$

In einem $N$-dimensionalen Raum gibt es also genau $N$ verschiedene Typen von Integralen, entsprechend jeweils der Dimension $s$ der Hyperfläche, über die integriert wird. Die Tensoren $T_{n_1 \dots n_s}$ können wir als vollständig antisymmetrisch voraussetzen, da bei der Überschiebung mit $\mathrm{d}V^{n_1 \dots n_s}$ sowieso alle symmetrischen Anteile herausfallen würden. $G_s$ steht als Hinweis auf das $s$-dimensionale Integrationsgebiet.

Im vierdimensionalen Raum sind in (7,17) also 4 Integraltypen enthalten. Zu ihnen gehört z. B. mit $s = 1$ das einfache Kurvenintegral

$$I_1 = \int_{G_1} T_n \, \mathrm{d}x^n. \tag{7,18}$$

Für $s = 3$ kann man, wie wir in 4.4. gezeigt haben, den Tensor $T_{n_1 n_2 n_3}$ gemäß (4,40) auf einen Vektor $T^a$ abbilden:

$$T_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{a n_1 n_2 n_3} T^a = \frac{\sqrt{-g}}{3!} \Delta_{a n_1 n_2 n_3} T^a. \tag{7,19}$$

Hier ist es sinnvoll, durch

$$\mathrm{d}f_a = \frac{1}{3!} \varepsilon_{a n_1 n_2 n_3} \, \mathrm{d}V^{n_1 n_2 n_3} \tag{7,20}$$

den (Pseudo-) Vektor $\mathrm{d}f_a$ einzuführen, der senkrecht auf dem Hyperflächenstück steht (d. h. senkrecht zu den drei Vektoren $\mathrm{d}_i x^n$) und dessen Länge in einem System (7,12) gerade $\sqrt{-g}\, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3$ ist. $\mathrm{d}f_a$ ist also das verallgemeinerte Flächenelement. Wir erhalten so die einfachere Gestalt

$$I_3 = \int_{G_3} T^a \, \mathrm{d}f_a \qquad \left( = \int_{G_3} T^a \sqrt{-g} \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3 \delta_a^4 \right) \tag{7,21}$$

des Hyperflächenintegrals (in Klammern im System, in dem $G_3$ die Fläche $x_4 =$ const ist und in dem (7,12) gilt).

Für $s = 4$ schließlich ist jeder vollantisymmetrische Tensor $T_{n_1 n_2 n_3 n_4}$ dem $\varepsilon$-Tensor proportional:

$$T_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{4!} T \varepsilon_{n_1 n_2 n_3 n_4}. \tag{7,22}$$

Wegen

$$\delta^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{m_1 m_2 m_3 m_4} = -\varepsilon^{n_1 n_2 n_3 n_4} \varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} \tag{7,23}$$

[vgl. 4,28)] ist es zweckmäßig, durch

$$\mathrm{d}V = -\varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} \, \mathrm{d}_1 x^{m_1} \, \mathrm{d}_2 x^{m_2} \, \mathrm{d}_3 x^{m_3} \, \mathrm{d}_4 x^{m_4} \tag{7,24}$$

das Volumenelement $\mathrm{d}V$ einzuführen, das in dem ausgezeichneten System (7,12) die Form

$$\mathrm{d}V = \sqrt{-g} \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3 \, \mathrm{d}x^4 \tag{7,25}$$

hat. Volumenintegrale haben also immer die einfache Gestalt

$$I_4 = \int_{G_4} T \,\mathrm{d}V \quad \left(= \int_{G_4} T \sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}x^4\right) \tag{7,26}$$

[in Klammern die Form bei Gültigkeit von (7,12)].

## 7.4. Integralsätze

Die in einem Riemannschen Raum gültigen Integralsätze haben alle die Form des Stokesschen Satzes, d. h., sie führen das Integral über eine verallgemeinerte Rotation

$$T_{[n_1 n_2 \ldots n_{s-1}; n_s]} = T_{[n_1 \ldots n_{s-1}, n_s]} \tag{7.27}$$

auf ein Integral über den Rand $G_{s-1}$ des ursprünglichen (einfach zusammenhängenden) Integrationsgebietes $G_s$ zurück:

$$\int_{G_s} T_{n_1 \ldots n_{s-1}, n_s}\,\mathrm{d}V^{n_s n_1 \ldots n_{s-1}} = \int_{G_{s-1}} T_{n_1 \ldots n_{s-1}}\,\mathrm{d}V^{n_1 \ldots n_{s-1}}. \tag{7,28}$$

(Wegen der Antisymmetrie des Volumenelementes konnten wir die Antisymmetrisierungsklammern am Tensorfeld weglassen.) Trotz der partiellen Ableitung ist (7,28) eine Tensorgleichung — man kann jederzeit die partielle durch die kovariante Ableitung ersetzen.

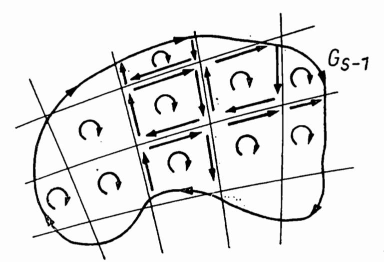



Abb. 7.2
Zum Stokesschen Satz für eine Fläche $G_s$.

Den Beweis dieses Satzes wollen wir hier nicht durchführen, sondern nur die Beweisidee andeuten: Ähnlich wie beim Beweis des Stokesschen Satzes für eine zweidimensionale Fläche zerlegt man das Gebiet $G_s$ in infinitesimale Elemente, zeigt die Gültigkeit des Satzes für diese Elemente und summiert über alle Elemente auf. Bei der Summation heben sich die Anteile der „inneren" Oberfläche heraus, da sie jeweils entgegengesetzt durchlaufen werden (vgl. Abb. 7.2).

Im dreidimensionalen flachen Raum gibt es demnach 3 Integralsätze. Für $s = 1$ erhalten wir aus (7,28)

$$\int_{P_1}^{P_2} T_{,n}\,\mathrm{d}x^n = T(P_2) - T(P_1) \tag{7,29}$$

(der Rand einer Kurve sind die beiden Endpunkte $P_1$ und $P_2$). Der eigentliche Stokessche Satz entspricht $s = 2$, und $s = 3$ liefert den Gaußschen Satz.

Auch im vierdimensionalen Raum ist der Gaußsche Satz ein Spezialfall des allgemeinen Stokesschen Satzes (7,28). Wegen (7,19) und (7,20) erhalten wir nämlich aus (7,28) für $N = s = 4$

$$\int\limits_{G_4} \frac{1}{3!}\, \varepsilon_{an_1n_2n_3} T^a{}_{;n_4}\, \mathrm{d}V^{n_4n_1n_2n_3} = \int\limits_{G_3} T^a\, \mathrm{d}f_a,$$

hieraus nach Einsetzen von (7,11), (7,23) und (7,24)

$$-\int\limits_{G_4} \frac{1}{3!}\, \varepsilon_{an_1n_2n_3} T^a{}_{;n_4} \varepsilon^{n_4n_1n_2n_3}\, \mathrm{d}V = \int\limits_{G_3} T^a\, \mathrm{d}f_a,$$

und bei Berücksichtigung der Rechenregel (4,31) schließlich den Gaußschen Satz

$$\int\limits_{G_4} T^a{}_{;a}\, \mathrm{d}V = \int\limits_{G_3} T^a\, \mathrm{d}f_a. \tag{7,30}$$

Bei Rechnungen mit den Integralen und Integralsätzen hat man darauf zu achten, daß die Orientierung der Hyperflächenelemente richtig gewählt wird und erhalten bleibt: Bei Vertauschung von Koordinaten ändert sich das Vorzeichen des Hyperflächenelementes $\mathrm{d}V^{n_1\ldots n_s}$. Eine solche feste Orientierungsvorschrift tritt ja auch bei dem üblichen Stokesschen Satz in drei Dimensionen auf, wo der Umlaufsinn der Randkurve der Fläche fest mit der Orientierung der Fläche verknüpft ist.

## 7.5. Integrale Erhaltungssätze

Eine physikalisch besonders wichtige Anwendung des Gaußschen Integralsatzes wollen wir ausführlicher darstellen. Aus der speziell-relativistischen Physik weiß man ja, daß eine mathematische Aussage der Struktur

$$T^{a\ldots c}{}_{;a} = 0 \tag{7,31}$$

(Divergenzfreiheit eines Tensorfeldes) physikalisch einem Erhaltungssatz entspricht, also der Feststellung, daß sich eine physikalische Größe zeitlich nicht ändert. Zum Beweis dieses Zusammenhangs benutzt man den auch für Tensorkomponenten gültigen Gaußschen Satz.

In einem Riemannschen Raum ist die Zahl möglicher integraler Erhaltungssätze schon allein dadurch eingeschränkt, daß der Gaußsche Satz (7,30) nur auf die Divergenz eines Vektors angewandt werden kann. Welche Folgerungen kann man nun aus

$$T^a{}_{;a} = 0 \tag{7,32}$$

ziehen?

Denken wir uns ein Vektorfeld $T^a(x^i)$, das nur innerhalb eines endlichen Raumbereiches von Null verschieden ist, und wenden wir (7,30) auf ein vierdimensionales „zylindrisches" Gebiet an, dessen dreidimensionaler „Mantel" $G_3^{(M)}$ außerhalb dieses (in Abb. 7.3 schraffierten) Raumbereiches liegt.

Da die Beiträge des Mantels $G_3^{(M)}$ verschwinden, folgt aus (7,30) und (7,32)

$$\int\limits_{G_3^{(1)}} T^a\, \mathrm{d}f_a + \int\limits_{G_3^{(2)}} T^a\, \mathrm{d}f_a = 0. \tag{7,33}$$

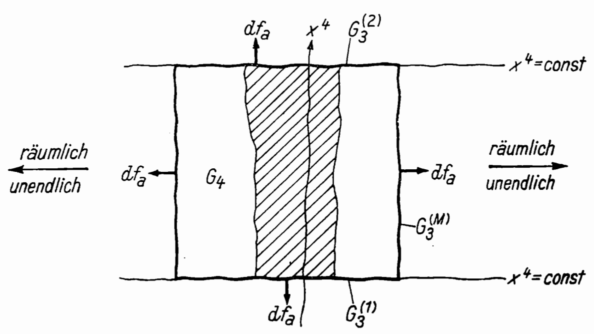



Abb. 7.3
Integrationsbereiche bei der Ableitung des Erhaltungssatzes (7.34)

Lassen wir nun die Mantelflächen ins (räumlich) Unendliche rücken, dann überdecken die Integrationsgebiete $G_3^{(1)}$ und $G_3^{(2)}$ jeweils den vollständigen Ortsraum $x^4 = \text{const}$. Beachten wir noch die entgegengesetzte Orientierung von $\mathrm{d}f_a$ in den beiden Gebieten, dann folgt aus (7,33) und (7,20)

$$\int\limits_{x^4=\text{const}} T^a \, \mathrm{d}f_a = \int\limits_{x^4=\text{const}} T^4 \sqrt{-g} \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3 = \text{const}. \tag{7,34}$$

Das Integral (7,34) definiert eine Größe, deren Wert nicht von der (willkürlich wählbaren) Zeitkoordinate $x^4$ abhängt, es definiert eine Erhaltungsgröße. Wir haben diesen Satz abgeleitet unter der Voraussetzung eines sogenannten „inselartigen", d. h. auf einen endlichen Raumbereich beschränkten, Vektorfeldes $T^a$. Er gilt jedoch auch, wenn gar keine Mantelflächen $G_3^{(M)}$ auftreten, d. h. der Raum geschlossen ist (wie eine zweidimensionale Kugelfläche), oder wenn das Integral über den Mantel gegen Null strebt ($T^a$ genügend schnell abnimmt, wenn die Mantelfläche ins räumlich Unendliche verschoben wird).

*Literatur zu Kapitel 7.:*

[15], [16], [17].

# 8. Grundgesetze der Physik in Riemannschen Räumen

## 8.1. Wie findet man die physikalischen Grundgesetze?

Ehe wir uns im nächsten Kapitel den Gesetzen des Gravitationsfeldes zuwenden, d. h. der Frage, wie die in der Welt vorhandenen Massen die Struktur des Riemannschen Raumes bestimmen, wollen wir hier nach den physikalischen Gesetzen fragen, die in einem *vorgegebenen* Riemannschen Raum gelten, also danach, wie ein vorgegebenes Schwerefeld andere physikalische Vorgänge beeinflußt. Wie kann man eine im Minkowski-Raum ohne Berücksichtigung der Schwerkraft formulierte physikalische Grundgleichung in den Riemannschen Raum übertragen und damit die Schwerkraft berücksichtigen?

Das Wort „übertragen" in dieser Fragestellung verdeckt etwas die Tatsache, daß es eigentlich um das Aufsuchen ganz neuer physikalischer Gesetze geht, die nur wegen der besonders einfachen Struktur der Wirkung des Gravitationsfeldes den alten Gesetzen sehr ähnlich sind. Es ist klar, daß uns hier keine logischen und mathematischen Überlegungen zwingend die neue Form der Gesetze vermitteln können, sondern daß wir die Antwort nur durch Beobachtung und Erfahrung gewinnen können. Bei dem Übertragungsprinzip, das wir suchen, geht es also um in möglichst einfache Vorschriften zusammengefaßte Erfahrung.

In der Geschichte der Relativitätstheorie spielt in diesem Zusammenhang das Kovarianzprinzip eine große Rolle. Eine klare und eindeutige Formulierung dieses Prinzips gibt es nicht, die Meinungen der verschiedenen Autoren gehen hier auseinander. Das Kovarianzprinzip sagt etwa aus, daß physikalische Gesetze unter Benutzung von Tensoren kovariant zu schreiben sind, um die prinzipielle Gleichwertigkeit aller Koordinatensysteme zu sichern. Gegen dieses Prinzip sind viele kritische Einwände erhoben worden, die darauf zielen, daß es weder ein *physikalisches* Prinzip ist noch die Richtigkeit der so erhaltenen Gleichungen gewährleistet. Ein Beispiel aus der Speziellen Relativitätstheorie soll dies erläutern: Sicher ist die Potentialgleichung

$$\triangle V = \eta^{\alpha\beta} V_{,\alpha,\beta} = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{8,1}$$

nicht lorentzinvariant. Wir können sie aber lorentzinvariant machen, indem wir ein Hilfsfeld $u^n$ einführen, das in einem speziellen Koordinatensystem [in dem (8,1) gilt] die Form $u^n = (0, 0, 0, c)$ hat. Die so erhaltene Gleichung

$$\triangle V = (\eta^{ab} + u^a u^b/c^2)\, V_{,a,b} = 0, \qquad a, b, = 1, \ldots, 4 \tag{8,2}$$

ist zwar lorentzinvariant (kovariant), aber sicher falsch, da sich Wirkungen immer noch mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreiten. Natürlich muß man an (8,2) kritisieren, daß ad hoc ein Vektorfeld $u^a$ eingeführt wurde, das die in (8,1) benutzten dreidimensionalen Koordinaten auszeichnet und damit das Ruhesystem eines „Äthers" bevorzugt.

Es ist lehrreich, dieses Beispiel mit dem Übergang von der lorentzinvarianten Wellengleichung

$$\square\, V = \eta^{ab} V_{,a,b} = 0 \tag{8,3}$$

zur allgemein-kovarianten Gleichung

$$\square\, V = g^{ab} V_{;a;b} = 0 \tag{8,4}$$

zu vergleichen. An die Stelle der Hilfsgröße $u^n$ ist die Hilfsgröße $g^{ab}$ getreten, die auch spezielle Koordinatensysteme (z. B. das lokal geodätische) auszeichnet. Woher wissen wir, ob (8,4) richtig ist? Der fundamentale Unterschied zwischen (8,2) und (8,4) besteht darin, daß $g^{ab}$ im Gegensatz zu $u^a$ eine physikalische Bedeutung hat: Die Metrik beschreibt den Einfluß des Gravitationsfeldes. Als physikalischen Kern des Kovarianzprinzips kann man daher die Forderung auffassen, daß physikalische Gleichungen kovariant sein sollten und allen zur Gewährleistung der Kovarianz einzuführenden metrischen Größen Eigenschaften des Schwerefeldes entsprechen.

Eine viel bedeutsamere Übertragungsvorschrift folgt aus dem Äquivalenzprinzip. In Übereinstimmung mit der Erfahrung können wir die Gleichheit von träger und schwerer Masse verallgemeinern. Zu der Masse eines Körpers tragen ja *alle* Arten von

Wechselwirkungen zwischen seinen Bestandteilen bei (Kernkräfte in den Kernen, elektromagnetische Kräfte in Atomen und Molekülen). Das Äquivalenzprinzip sagt aus, daß man lokal (in einem nicht zu großen Raum-Zeit-Gebiet) *prinzipiell* nicht zwischen der Wirkung eines Schwerefeldes und einer Beschleunigung unterscheiden kann. Oder anders gesagt: Ein in einem Schwerefeld frei fallender Beobachter kann durch physikalische Experimente in seiner nächsten Umgebung das Schwerefeld nicht nachweisen, für ihn verlaufen *alle* Vorgänge wie in einem Inertialsystem.

Koordinatensysteme, in denen wie in einem Inertialsystem die Bahnkurven kräftefreier Teilchen durch $\mathrm{d}^2x^a/\mathrm{d}\tau^2 = 0$ beschrieben werden, sind uns in Gestalt der lokalgeodätischen Koordinaten bereits begegnet. Wegen dieser Übereinstimmung werden wir Inertialsysteme und lokal-geodätische Koordinatensysteme identifizieren. Wie wir wissen, läßt sich ein solches lokal-geodätisches System nur in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes einführen; es ist nur so weit brauchbar, wie man Ableitungen der Christoffel-Symbole und damit den Einfluß der Raumkrümmung vernachlässigen kann. Dem entspricht, daß auch der frei fallende Beobachter bei der Untersuchung größerer Raum-Zeit-Gebiete die Wirkung der Schwerkraft feststellen kann: Für ihn sind die Planetenbahnen keine Geraden, und beim Aufprall auf den Erdboden ist der frei fallende Kasten kein Inertialsystem mehr.

Die Identifizierung von Inertialsystem (frei fallendem Beobachter) und lokalgeodätischen Koordinaten und die Definition (5,4) der kovarianten Ableitung machen folgendes Übertragungsprinzip plausibel: Man formuliere die physikalischen Gesetze lorentzinvariant in einem Inertialsystem und ersetze die partiellen Ableitungen durch kovariante. Diese Vorschrift sichert gleichzeitig die Kovarianz der entstehenden Gleichungen und deren Gültigkeit bei Benutzung krummliniger Koordinaten im Minkowski-Raum.

Zwei kritische Einwände lassen sich sofort erheben, die zeigen, daß diese Vorschrift weder eindeutig noch logisch beweisbar ist. Der erste Einwand betrifft die Reihenfolge bei Ableitungen höherer Ordnung. Partielle Ableitungen sind vertauschbar, kovariante nicht. Praktische Beispiele zeigen indessen, daß man dieses Problem meistens einfach lösen kann. Der zweite Einwand betrifft die Frage, woher wir denn wissen, daß nicht auch der Krümmungstensor und seine Ableitungen in physikalische Grundgesetze eingehen. Die dann entstehenden kovarianten Gleichungen würden in lokal-geodätischen Koordinaten *nicht* in die entsprechenden Gleichungen des Minkowski-Raumes übergehen; die Unterschiede würden aber sicher klein und nur schwer nachweisbar sein. Eine solche Abänderung unserer Übertragungsvorschrift läßt sich nicht prinzipiell ausschließen. Bisher sind aber noch keine Experimente oder anderen Hinweise bekannt, die sie erforderlich machen.

Wir werden in den folgenden Abschnitten die wichtigsten physikalischen Gesetze in Riemannschen Räumen formulieren, ohne immer wieder auf die Übertragungsvorschrift „partielle → kovariante Ableitung" hinzuweisen. Zur speziell-relativistischen Formulierung dieser Gesetze verweisen wir auf entsprechende Lehrbücher.

## 8.2. Punktmechanik

Der Impuls $p^n$ eines Massenpunktes ist das Produkt aus Masse $m_0$ und Vierergeschwindigkeit $u^n$:

$$p^n = m_0 \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau} = m_0 u^n, \tag{8,5}$$

wobei $\tau$ die durch

$$ds^2 = g_{nm}\,dx^n\,dx^m = -c^2\,d\tau^2 \tag{8,6}$$

definierte Eigenzeit ist. Bei kräftefreier Bewegung im Minkowski-Raum ist der Impuls konstant. Dementsprechend bewegt sich ein Massenpunkt, auf den außer der Schwerkraft keine weitere Kraft wirkt, auf einer Geodäten des Riemannschen Raumes:

$$\frac{Dp^n}{D\tau} = m_0\,\frac{D^2x^n}{D\tau^2} = m_0 u^n{}_{;i}u^i = m_0\left(\frac{d^2x^n}{d\tau^2} + \Gamma^n_{ab}\,\frac{dx^a}{d\tau}\,\frac{dx^b}{d\tau}\right) = 0. \tag{8,7}$$

Äußere Kräfte $K^n$ bewirken ein Abweichen von der geodätischen Bewegung:

$$\frac{Dp^n}{D\tau} = m_0\,\frac{D^2x^n}{D\tau^2} = K^n. \tag{8,8}$$

Da der Betrag $-c^2 = u_n u^n$ der Vierergeschwindigkeit konstant ist, gilt

$$u_{n;i}u^n = 0, \tag{8,9}$$

d. h., die Vierergeschwindigkeit steht senkrecht auf der Viererbeschleunigung $\dot{u}^n = u^n{}_{;i}u^i$ und der Kraft:

$$u^n u_{n;i}u^i = u^n\dot{u}_n = 0 = K^n u_n. \tag{8,10}$$

Die vier Bewegungsgleichungen (8,8) sind also nicht unabhängig voneinander (der Energiesatz ist eine Folge des Impulssatzes).

Um den Zusammenhang zwischen Newtonscher Mechanik und der Mechanik in einem Riemannschen Raum besser zu verstehen, wollen wir skizzieren, wie in der für alle Koordinatensysteme geltenden Geodätengleichung (8,7) die Führungsbeschleunigung $-\boldsymbol{a}$ und die Coriolis-Beschleunigung $-2\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ enthalten sind, die ein beschleunigt bewegter Beobachter in einem rotierenden Koordinatensystem feststellt.

Wir stellen uns also einen Beobachter vor, der sich auf einer beliebigen (zeitartigen) Weltlinie bewegt und dabei ein orthogonales Dreibein mit sich führt, dessen Richtungen er mit den Richtungen seiner räumlichen Koordinatenachse identifiziert. Er wird dabei zur Beschreibung der Vorgänge in seiner unmittelbaren Umgebung ein Koordinatensystem bevorzugen, das folgende Eigenschaften hat: Der Beobachter ist ständig im Nullpunkt des räumlichen Systems; als Zeit nimmt er seine Eigenzeit; auf seiner Weltlinie $x^\alpha = 0$ benutzt er für alle Zeiten eine Minkowski-Metrik (vgl. Abb. 8.1). Zusammengefaßt gibt dies bis auf höhere, in den $x^n$ quadratische Glieder:

$$ds^2 = \eta_{ab}\,dx^a\,dx^b + g_{ab,\nu}(O)\,x^\nu\,dx^a\,dx^b, \qquad g_{ab,4}(O) = 0. \tag{8,11}$$

Als räumliche Koordinatenlinien wird er die Linien nehmen, die durch „gerade“ Fortsetzung seiner Dreibeinachsen entstehen (also Geodäten sind), auf ihnen jeweils die Bogenlänge als Koordinate abtragen und dieses System so ergänzen, daß in seinem Ortsraum $x^4 = \text{const}$ lokal *alle* Geodäten die Gestalt $x^\alpha = s\lambda^\alpha$ von Geraden haben ($s$ Bogenlänge, $\lambda^\alpha$ Richtungskosinus der Geodäten). Für diese Geodäten gilt dann für beliebiges konstantes $\lambda^\alpha$

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{mn}\,\frac{dx^m}{ds}\,\frac{dx^n}{ds} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = 0, \tag{8,12}$$

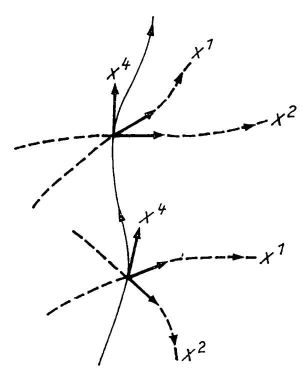



Abb. 8.1
Koordinatensystem eines beliebig bewegten Beobachters

d. h., alle Christoffel-Symbole $\Gamma^{a}_{\mu\nu}$ ($a = 1, \ldots, 4$; $\mu$, $\nu = 1, 2, 3$) verschwinden. Die Ableitungen der Metrik (8,11) erfüllen wegen (3,11) damit die Bedingungen

$$g_{\alpha\beta,\nu} = 0; \qquad g_{4\beta,\nu} = -g_{4\nu,\beta}. \tag{8,13}$$

Die Gln. (8,13) zeigen, daß es nur drei unabhängige Komponenten der Ableitungen $g_{4\beta,\nu}$ gibt; man kann diese entsprechend

$$g_{4\beta,\nu} = -\varepsilon_{4\beta\nu\mu}\frac{\omega^{\mu}}{c} = -\varepsilon_{\beta\nu\mu}\frac{\omega^{\mu}}{c} \tag{8,14}$$

auf die Komponenten eines „Dreiervektors“ $\omega^{\mu}$ abbilden. Die durch (8,11), (8,13) und (8,14) noch nicht erfaßten Ableitungen $g_{44,\nu}$ lassen sich durch die Beschleunigung $a_{\nu}$ des Beobachters ausdrücken: Für dessen Weltlinie $x^{\alpha} = 0$, $x^4 = ct = c\tau$ gilt

$$a^{\nu} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x^{\nu}}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^{\nu}_{ab}\frac{\mathrm{d}x^{a}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{b}}{\mathrm{d}t} = \Gamma^{\nu}_{44}c^2, \tag{8,15}$$

also

$$g_{44,\nu} = -2\frac{a_{\nu}}{c^2} = -2g_{\nu b}\frac{a^{b}}{c^2}. \tag{8,16}$$

Wir fassen zusammen: Ein Beobachter, der sein lokales Minkowski-System mit sich führt und in dessen Ortsraum alle von ihm ausgehenden Geodäten Geraden sind, benutzt in der Umgebung seiner Weltlinie $x^{\alpha} = 0$, $x^4 = c\tau$ das Koordinatensystem

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta} - 2\varepsilon_{\beta\nu\mu}x^{\nu}\frac{\omega^{\mu}}{c}\,\mathrm{d}x^4\,\mathrm{d}x^{\beta} - \left(1 + \frac{2a_{\nu}x^{\nu}}{c^2}\right)(\mathrm{d}x^4)^2. \tag{8,17}$$

Für ihn sind die einzigen nichtverschwindenden Christoffel-Symbole

$$\Gamma^{\alpha}_{4\nu} = \varepsilon_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\frac{\omega^{\mu}}{c}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{44} = \frac{a^{\alpha}}{c^2}, \qquad \Gamma^{4}_{4\nu} = \frac{a_{\nu}}{c^2}. \tag{8,18}$$

Bewegt sich der Beobachter auf einer Geodäten, verschwindet $a_{\nu}$. Da in den Koordinaten (8,17) und (8,18) die Definitionsgleichung (5,24) des Fermi-Walker-Transports die Form

$$\frac{\mathrm{d}T^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} + \varepsilon_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}T^{\alpha} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}T^4}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{8,19}$$

hat, muß für einen Beobachter, der sein lokales, aus für ihn konstanten Vektoren gebildetes Dreibein einem Fermi-Walker-Transport unterwirft, der Vektor $\omega^\mu$ verschwinden. Sind sowohl $a^\nu$ als auch $\omega^\mu$ Null, dann ist das Koordinatensystem (8,17) längs der gesamten Weltlinie des Beobachters ein Inertialsystem.

Bei der Beschreibung der Bewegung eines Teilchens wird der Beobachter natürlich sein Koordinatensystem (8,17) bis (8,18) benutzen und in ihm die Beschleunigung $d^2x^\alpha/\mathrm{d}t^2$ dieses Teilchens untersuchen. Aus der Geodätengleichung folgt für die drei räumlichen Komponenten der Beschleunigung die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^3} = 2\varepsilon^\alpha{}_{\nu\mu}\omega^\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} - a^\alpha - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{8,20}$$

Den Zusammenhang zwischen $\lambda$ und $t$ können wir aus der zeitlichen Komponente

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\lambda^2} + 2\frac{a_\nu}{c^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{8,21}$$

der Geodätengleichung entnehmen. Einsetzen von (8,21) in (8,20) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -a^\alpha + 2\varepsilon^\alpha{}_{\nu\mu}\omega^\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} + \frac{2a_\nu}{c^2}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, \tag{8,22}$$

in Vektorschreibweise

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{2(\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{r}})}{c^2}\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{8,23}$$

Man erkennt die Führungsbeschleunigung $-\boldsymbol{a}$ und ihre relativistische Korrektur $2(\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}/c^2$ (beide verschwinden, wenn sich der Beobachter kräftefrei auf einer Geodäten bewegt) sowie die Coriolis-Beschleunigung $-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, hervorgerufen durch die Rotation des vom Beobachter mitgeführten Dreibeins relativ zu einem nach Fermi-Walker transportierten Dreibein. Das Verschwinden des Coriolis-Terms im Fermi-Walker-System rechtfertigt die Aussage, daß für einen nicht frei fallenden Beobachter ($a^\nu \neq 0$) ein durch Fermi-Walker-Transport des räumlichen Dreibeins erzeugtes lokales Koordinatensystem die bestmögliche Realisierung eines nichtrotierenden Systems ist.

## 8.3. Elektrodynamik im Vakuum

*Die Feldgleichungen.* Das elektromagnetische Feld wird, wie im Minkowski-Raum, durch einen antisymmetrischen Feldstärketensor $F_{mn}$ beschrieben. Da dieser den Gleichungen

$$F_{\langle mn;a\rangle} = F_{mn;a} + F_{na;m} + F_{am;n} = F_{mn,a} + F_{na,m} + F_{am,n} = 0 \tag{8,24}$$

genügt, läßt er sich als Rotation des Viererpotentials $A_n$ darstellen:

$$F_{mn} = A_{n;m} - A_{m;n} = A_{n,m} - A_{m,n}. \tag{8,25}$$

Dieses Potential ist nur bis auf einen vierdimensionalen Gradienten bestimmt. Das Feld wird vom Viererstrom $j^m$ erzeugt:

$$F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, F^{mn}\right)_{,n} = \frac{1}{c}\, j^m . \tag{8,26}$$

Wegen der Antisymmetrie von $F_{mn}$ ist (8,26) nur integrabel (in sich widerspruchsfrei), wenn die Kontinuitätsgleichung

$$j^m{}_{;m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, j^m\right)_{,m} = 0 \tag{8,27}$$

erfüllt ist. Für eine inselartige Ladungsverteilung folgt aus ihr der Erhaltungssatz

$$\int\limits_{x^4=\mathrm{const}} j^a\, \mathrm{d}f_a = \mathrm{const} = Q \tag{8,28}$$

der Gesamtladung $Q$ (vgl. Abschn. 7.5.).

Durch Einsetzen von (8,25) in (8,26) kann man die verallgemeinerten inhomogenen Wellengleichungen für die Potentiale ableiten. Unter Bevorzugung der Schreibweise mit kovarianten Ableitungen erhält man

$$A^{n;m}{}_{;n} - A^{m;n}{}_{;n} = A^n{}_{;n}{}^{;m} = R_n{}^m A^n - A^{m;n}{}_{;n} = \frac{1}{c}\, j^m . \tag{8,29}$$

Geht man dagegen unmittelbar von der speziell-relativistischen Gleichung

$$(A^n{}_{,n})^{,m} - A^{m,n}{}_{,n} = \frac{1}{c}\, j^m \tag{8,30}$$

aus und ersetzt in ihr die partielle durch die kovariante Ableitung, dann folgt (8,29) *ohne* den Term mit dem Ricci-Tensor $R_n{}^m$ (der durch Vertauschung kovarianter Ableitungen entstand). Man sieht hier deutlich, daß die Übertragungsvorschrift „partielle $\rightarrow$ kovariante Ableitung" bei Anwendung auf die Potentiale nicht eindeutig ist. Poatentiale sind jedoch nicht unmittelbar meßbar, und für die physikalisch wichtigeren Feldstärken und ihre Ableitungen ist unsere oben gegebene Vorschrift eindeutig. Da die Gl. (8,29) aus dieser Vorschrift zwangsläufig folgt, ist sie die richtige Verallgemeinerung der inhomogenen Wellengleichung.

Die Lorentz-Konvention

$$A^n{}_{;n} = 0 \tag{8,31}$$

hat in Riemannschen Räumen nicht die Bedeutung wie im Minkowski-Raum, da es nicht immer Koordinaten geben muß, in denen ihre Erfüllung die Entkopplung der 4 Gleichungen (8,29) sichert oder sonst vorteilhaft ist.

Für praktische Rechnungen ist oft die Benutzung partieller Ableitungen zweckmäßig; (8,25) und (8,26) geben

$$\left[\sqrt{-g}\, g^{ma} g^{nb} (A_{b,a} - A_{a,b})\right]_{,n} = \sqrt{-g}\, \frac{1}{c}\, j^m . \tag{8,32}$$

*Lagrange-Funktion und Energieimpulstensor.* Die Maxwell-Gleichungen lassen sich aus dem Wirkungsprinzip

$$W = \int \mathcal{L}\, d^4x = \int \left[ \frac{1}{c}\, j^a A_a - \frac{1}{4}\, (A_{n,m} - A_{m,n})\, (A^{n,m} - A^{m,n}) \right] \sqrt{-g}\, d^4x$$
$$= \text{Extr} \tag{8,33}$$

ableiten, wobei als unabhängige Feldgrößen die Komponenten des Potentials variiert werden.

Der symmetrische Energieimpulstensor

$$T^{mn} = F^{am} F_a{}^n - \tfrac{1}{4}\, g^{mn} F_{ab} F^{ab} \tag{8,34}$$

ist spurfrei: $T^n{}_n = 0$. Seine Divergenz ist bis auf das Vorzeichen gleich der Lorentz-Kraft-Dichte:

$$T^{mn}{}_{;n} = -\frac{1}{c}\, F^{mn} j_n\,. \tag{8,35}$$

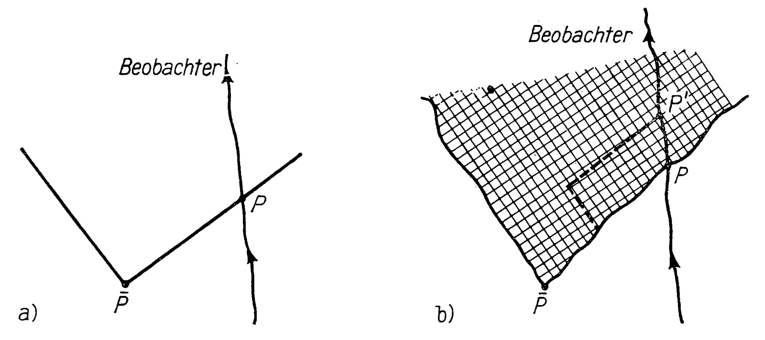



Abb. 8.2
Wirkungsausbreitung zwischen Quelle $\bar{P}$ und Beobachter
(a) Minkowski-Raum: auf dem Lichtkegel
(b) Riemannscher Raum: im gesamten Innern (schraffiert) des Lichtkegels gestrichelte Linie: möglicher Lichtweg („Streuung")

*Quellenmäßige Darstellung von Lösungen.* Auch in einem Riemannschen Raum ist es möglich, die Differentialgleichung (8,29) in der Form eines Integrals

$$A^m(x^i) = \int G^{m\bar{n}}(x^i, \bar{x}^i)\, j_{\bar{n}}(\bar{x}^i) \sqrt{-\bar{g}}\, d^4\bar{x} \tag{8,36}$$

zu lösen. Der Zweipunkttensor $G^{m\bar{n}}$, die Verallgemeinerung der Greenschen Funktion, ist dabei im allgemeinen eine sehr komplizierte Funktion. Wir wollen (ohne Beweis) auf einen bemerkenswerten Unterschied des Verhaltens der Wirkungsausbreitung (z. B. Lichtausbreitung) in einem Riemannschen Raum bzw. einem Minkowski-Raum hinweisen: Während im Minkowski-Raum die Wirkungsausbreitung im Vakuum exakt auf dem Lichtkegel erfolgt, d. h. ein Lichtblitz im Punkt $\bar{P}$ der Abb. 8.2a den Beobachter genau im Punkt $P$ erreicht, kann sich im Riemannschen Raum die Welle auch im Innern des Vorwärtslichtkegels ausbreiten, auch Punkte später als $P$ (z. B. $P'$) bemerken noch einen (schwachen) Lichtblitz. Die Ursache dieser Abweichung, die man auch als Abweichung vom Huygensschen Prinzip interpretieren

kann, kann man sich anschaulich in einer Art Streuung der Lichtwellen durch die Raumkrümmung vorstellen. In besonders einfachen Riemannschen Räumen tritt dieser Effekt nicht auf; zu ihnen gehören z. B. die Robertson-Walker-Metriken (vgl. Kapitel 25.).

*Besondere Eigenschaften quellenfreier Felder.* Da man die Gln. (8,24) unter Verwendung des dualen Feldstärketensors

$$\tilde{F}_{ab} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{abmn}F^{mn} \qquad (\tilde{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{B}, \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E}) \tag{8,37}$$

in das System

$$\tilde{F}^{ab}{}_{;b} = 0$$

überführen kann, sind die Maxwell-Gleichungen für $j^m = 0$ den Gleichungen

$$\Phi^{ab}{}_{;b} = (F^{ab} + \mathrm{i}\,\tilde{F}^{ab})_{;b} = 0 \tag{8,38}$$

für den komplexen Feldstärketensor $\Phi^{ab}$ äquivalent. Eine Lösung $\Phi^{ab}$ bleibt auch nach Multiplikation mit einer komplexen Zahl $e^{i\alpha}$ (einer „Dualitätsrotation") eine Lösung. Der Energieimpulstensor

$$T^{ab} = \tfrac{1}{2}\,\Phi^{ac}\bar{\Phi}^{b}{}_{c} \tag{8,39}$$

ändert sich bei einer solchen Dualitätsrotation nicht. In der Dreierschreibweise im flachen Raum entspricht eine Dualitätsrotation der Transformation

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \cos\alpha\,\boldsymbol{E} + \sin\alpha\,\boldsymbol{B}, \qquad \hat{\boldsymbol{B}} = \cos\alpha\,\boldsymbol{B} - \sin\alpha\,\boldsymbol{E}. \tag{8,40}$$

Die quellenfreien Maxwell-Gleichungen sind „konforminvariant". Man versteht darunter die Tatsache, daß ein Potential $A_a$, das in einem Riemannschen Raum der Metrik $ds^2$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen ist, sie auch in einem konform äquivalenten Raum der Metrik $d\bar{s}^2 = M^2\,ds^2$ erfüllt. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (8,32) mit $j^m = 0$ bei Beachtung der Beziehungen

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= M^2\,ds^2, & \bar{g}_{ab} &= M^2 g_{ab}, & \bar{A}_a &= A_a,\\ && \bar{g}^{ab} &= M^{-2}g^{ab}, & \bar{A}_{a,b} &= A_{a,b}.\\ && \bar{g} &= M^8 g, \end{aligned} \tag{8,41}$$

*Elektromagnetische Nullfelder.* Der elektromagnetische Feldstärketensor besitzt zwei Invarianten, nämlich

$$I_1 = F_{ab}F^{ab}, \qquad I_2 = F_{ab}\tilde{F}^{ab}, \tag{8,42}$$

(vgl. Abschnitt 4.5.), die im Minkowski-Raum die Gestalt

$$I_1 = -2(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2), \qquad I_2 = 4\boldsymbol{E}\boldsymbol{B} \tag{8,43}$$

haben.

Elektromagnetische Nullfelder sind Felder, bei denen beide Invarianten verschwinden. Sie sind damit Verallgemeinerungen der ebenen Wellen im flachen Raum. Man kann zeigen, daß notwendig und hinreichend für das Verschwinden der beiden Invarianten die Struktur

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \lambda(p_m k_n - k_m p_n),\\ k^n k_n &= 0 = p_n k^n, \qquad p_n p^n = 1 \end{aligned} \tag{8,44}$$

des Feldstärketensors ist (z. B. durch Einführung eines lokalen Minkowski-Systems und Wahl der Koordinatenachsen so, daß $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$ und $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, 0)$ gilt). $F_{mn}$ ist also im Sinne von (4,55) ein einfacher Bivektor mit dem Nullvektor $k_n$ als Eigenvektor. Der zugeordnete Energieimpulstensor hat die einfache Struktur

$$T_{mn} = \lambda^2 k_m k_n . \tag{8,45}$$

*Inkohärente Strahlungsfelder.* Bei der inkohärenten Überlagerung elektromagnetischer Felder hat man die Energieimpulstensoren und nicht die Feldstärken zu addieren (bzw. zu mitteln). Ein Feldstärketensor kann dieser Überlagerung nicht mehr zugeordnet werden.

Zeichnen die sich überlagernden Felder im Ruhesystem $u^m = (0, 0, 0, c)$ eines Beobachters lokal keine räumliche Richtung aus, dann hat der resultierende Energieimpulstensor die Gestalt

$$T_{mn} = p g_{mn} + (p/c^2 + \mu)\, u_m u_n , \tag{8,46}$$

in einem lokalen Minkowski-System mit $u_n = (0, 0, 0, -c)$ also

$$T_{mn} = \begin{pmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & \mu c^2 \end{pmatrix} . \tag{8,47}$$

Bei der Überlagerung bleiben natürlich die Eigenschaften der Spurfreiheit $T^n{}_n = 0$ und der Divergenzfreiheit $T^{mn}{}_{;n} = 0$ erhalten. Es besteht demnach zwischen Strahlungsdruck $p$ und Energiedichte $\mu c^2$ die Beziehung

$$3p = \mu c^2 . \tag{8,48}$$

## 8.4. Geometrische Optik

Den Übergang von Wellenlösungen der quellenfreien Maxwell-Gleichungen zur geometrischen Optik kann man dadurch vollziehen, daß man in die Feldgleichungen

$$A^{n;m} - A^{m;n})_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g}\, g^{ma} g^{nb} (A_{b,a} - A_{a,b})\right]_{,n} = 0 \tag{8,49}$$

mit dem Ansatz

$$A_a = \hat{A}_a(x^n)\, e^{i\omega S(x^n)} \qquad (\hat{A}_a \text{ komplex, } S \text{ reell}) \tag{8,50}$$

eingeht und die Faktoren von $\omega^2$ und $\omega$ einzeln Null setzt. Wie im flachen Raum wird diese Aufspaltung in Amplitude $\hat{A}_a$ und Eikonal (Phase) $S$ nur in gewissen endlichen Raumgebieten sinnvoll sein und nur für großes $\omega$ eine gute Näherung darstellen.

Einsetzen von (8,50) in (8,49) gibt bei Berücksichtigung nur der Terme in $\omega^2$

$$S^{,m}(\hat{A}^n S_{,n}) - \hat{A}^m (S_{,n} S^{,n}) = 0 . \tag{8,51}$$

Der zu $\omega$ proportionale Anteil des Feldstärketensors ist

$$F_{mn} = (\hat{A}_n S_{,m} - \hat{A}_m S_{,n})\, i\omega\, e^{i\omega S} = i\omega (A_n S_{,m} - A_m S_{,n}) . \tag{8,52}$$

Er verschwindet, wenn $\hat{A}^m$ parallel zu $S^{,m}$ ist. Wir interessieren uns deshalb nur für die Lösung

$$S_{,n}S^{,n} = 0, \qquad A_n S^{,n} = 0 \tag{8,53}$$

von (8,51). Der Gradient $S_{,n}$ der Flächen gleicher Phase ist also ein Nullvektor, und der Feldstärketensor (8,52) hat die Struktur (8,44) des Feldstärketensors eines Nullfeldes, mit $k_m$ proportional zu $S_{,m}$ und $p_n$ proportional zu Re $A_n$ (man beachte, daß man zum Vergleich die Realteile der hier benutzten komplexen Feldgrößen nehmen muß). In dieser Näherung verhält sich das Feld demnach lokal wie eine ebene Welle.

Aus (8,53) folgt durch Differenzieren

$$S^{,n}S_{,n;m} = 0.$$

Da die Rotation eines Gradienten verschwindet ($S_{,n;m} = S_{,m;n}$), erhalten wir hieraus

$$S_{,m;n}S^{,n} = 0. \tag{8,54}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Kurven $x^n(\lambda)$, deren Tangentenvektor $S^{,n}$ ist,

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = S^{,n}, \tag{8,55}$$

Geodäten sind, wegen $S_{,n}S^{,n} = 0$ also Nullgeodäten.

Kennzeichnen wir die Welle nicht durch $\hat{A}_a$ und die Flächen gleicher Phase $S = \text{const}$, sondern durch deren Orthogonalkurven $x^n(\lambda)$ (die wir Lichtstrahlen nennen), so haben wir den Übergang von der Wellenoptik zur geometrischen Optik vollzogen. Gl. (8,54) lautet dann in Worten: Lichtstrahlen sind Nullgeodäten.

Wir wollen die Näherung noch einen Schritt weiter treiben, die zu $\omega$ proportionalen Glieder in den Maxwell-Gleichungen untersuchen und daraus Aussagen darüber gewinnen, wie sich Intensität und Polarisation der Welle beim Fortschreiten längs eines Lichtstrahls ändern.

Aus (8,49) und (8,53) erhält man zunächst

$$-\mathrm{i}\omega[2\hat{A}^m{}_{;n}S^{,n} + \hat{A}^m S^{,n}{}_{;n} - \hat{A}^n{}_{;n}S^{,m}] = 0. \tag{8,56}$$

Überschiebt man diese Gleichung mit dem (zu $\hat{A}_m$ konjugiert komplexen) Vektor $\bar{\hat{A}}_m$ und beachtet (8,53), dann läßt sich das Ereignis in der Form

$$\left(\bar{\hat{A}}_m\hat{A}^m\right)_{;n}S^{,n} + \left(\bar{\hat{A}}_m\hat{A}^m\right)S^{,n}{}_{;n} = 0 \tag{8,57}$$

oder in der dazu gleichwertigen Form

$$\left(\bar{\hat{A}}_m\hat{A}^m S^{,n}\right)_{;n} = 0 \tag{8,58}$$

schreiben. Da die Intensität der Welle proportional zu $\bar{\hat{A}}_m A^m$ ist, läßt sich (8,57) als Aussage über die Änderung der Intensität beim Fortschreiten in der Richtung $S^{,n}$ der Lichtstrahlen lesen. Noch anschaulicher ist aber die Deutung, die (8,58) nahelegt: Interpretiert man

$$J^n = \bar{\hat{A}}_m\hat{A}^m S^{,n} \tag{8,59}$$

als Photonenstrom, dann ist dieser Strom quellenfrei (Erhaltung der Photonenzahl) und hat die Richtung der Lichtstrahlen.

Eine weitere physikalische Folgerung aus (8,56) erhalten wir, wenn wir den Vektor $\hat{A}_m$ in seinen Betrag $a$ und den Einheitsvektor $P_m$ zerlegen:

$$\hat{A}_m = aP_m. \tag{8,60}$$

Es ist dann (8,57) gleichwertig zu

$$a_{,n}S^{,n} = -\tfrac{1}{2}aS^{,n}{}_{;n}, \tag{8,61}$$

und aus (8,56) folgt

$$P^m{}_{;b}S^{,b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{,n}}{a}P^n + P^n{}_{;n}\right)S^m. \tag{8,62}$$

Das heißt aber, daß der dem Feldstärketensor (8,52) zugeordnete Tensor $f_{mn}$,

$$f_{mn} = P_nS_{,m} - P_mS_{,n}, \tag{8,63}$$

in dem die charakteristischen Richtungen der Welle (Ausbreitungsrichtung $S^{,n}$ und Polarisationsrichtung $P^m$) enthalten sind, längs der Strahlen parallel transportiert wird: Es gilt

$$f_{mn;i}S^{,i} = 0. \tag{8,64}$$

## 8.5. Thermodynamik

Thermodynamische Systeme können außerordentlich kompliziert sein; z. B. kann in Sternen eine große Anzahl von Prozessen gleichzeitig ablaufen. Wir wollen versuchen, die allgemeinen Grundideen zu erläutern, uns bei der Ausführung aber auf die allereinfachsten Systeme beschränken.

Bei thermodynamischen Prozessen bleiben bestimmte Bausteine der Materie mit ihren Eigenschaften erhalten, in der nichtrelativistischen Thermodynamik z. B. Moleküle oder Atome und ihre Massen. Bei den Umwandlungen in Sternen und bei Kernprozessen treten an ihre Stelle die Baryonen mit ihrer Ruhemasse. Wir werden deshalb alle Größen auf diese Baryonen beziehen. Greifen wir z. B. ein Volumenelement des Systems heraus, dann werden wir als Vierergeschwindigkeit $u^i$ dieses Elementes die mittlere Baryonengeschwindigkeit nehmen. Die Strömung (Bewegung) des Systems wird also durch ein Vierergeschwindigkeitsfeld

$$u^i = u^i(x^n), \qquad u^iu_i = -c^2 \tag{8,65}$$

charakterisiert.

Um die Grundgesetze der Thermodynamik aufzustellen, gehe man zunächst in das lokale Ruhesystem

$$u^i = (0, 0, 0, c) \tag{8,66}$$

des betrachteten Volumenelementes und behandle dieses Volumenelement als ein im Gleichgewicht befindliches System (das natürlich mit seiner Umgebung in Wechselwirkung steht, so daß das Gesamtsystem nicht unbedingt im Gleichgewicht ist),

d. h., man führe für dieses Volumenelement die fundamentalen thermodynamischen Zustandsgrößen ein, z. B.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | Baryonenzahldichte, | $s$ | Entropie pro Baryonenmasse, | |
| $\varrho$ | Massendichte der Baryonen, | $p$ | isotroper Druck, | (8,67) |
| $T$ | Temperatur, | $\bar{\mu}$ | chemisches Potential, | |
| $u$ | innere Energie pro Masse, | $f$ | freie Energie pro Masse. | |

„Dichte" heißt hier immer pro dreidimensionalem Volumen im lokalen Ruhesystem"; die Entropiedichte wäre z. B. durch $s\varrho$ gegeben. Zwischen diesen Zustandsgrößen bestehen Relationen, die im einfachsten Fall aussagen, daß nur zwei von ihnen wirklich unabhängig sind und man aus der Kenntnis der Entropie als Funktion der Energie und der Dichte bzw. des spezifischen Volumens $v \equiv 1/\varrho$

$$s = s(u, v) \qquad (8,68)$$

die anderen Größen berechnen kann, z. B.

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T}, \qquad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}, \qquad f = u - Ts \quad \text{usw.} \qquad (8,69)$$

Für die Wechselwirkung der Volumenelemente mit ihrer Umgebung gelten Bilanzgleichungen, und zwar der Erhaltungssatz der Baryonenzahl:

$$(\varrho u^n)_{;n} = 0 \qquad (8,70)$$

(verallgemeinerte Massenerhaltung), die Bilanzgleichungen für Energie- und Impuls, die als Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors $T^{mn}$ formuliert werden:

$$T^{mn}{}_{;n} = 0 \qquad (8,71)$$

(verallgemeinerter I. Hauptsatz), und die Bilanzgleichung für die Entropie:

$$s^n{}_{;n} = \sigma \geqq 0, \qquad (8,72)$$

die aussagt, daß die Entropieproduktionsdichte $\sigma$ stets positiv oder Null ist (verallgemeinerter II. Hauptsatz). Einen physikalischen Sinn erhalten diese Gleichungen natürlich erst dadurch, daß Entropiestromdichte $s^n$ und Energieimpulstensor $T^{mn}$ untereinander und mit den thermodynamischen Größen (8,67) verknüpft werden.

Dies geschieht dadurch, daß man unter Benutzung des Projektionstensors

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b/c^2 \qquad (8,73)$$

den Energieimpulstensor in seine Bestandteile parallel und senkrecht zur Vierergeschwindigkeit zerlegt:

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + (u_a q_b + u_b q_a)/c^2 = \pi_{ab},$$
$$q_a u^a = 0, \qquad \pi_{ab} u^a = 0, \qquad \pi^a{}_a = 0, \qquad (8,74)$$

und die dabei auftretenden Größen mit den thermodynamischen Zustandsgrößen und dem Entropiestromvektor verbindet. Der Koeffizient von $h_{ab}$ ist der isotrope Druck $p$; die innere Energie pro Masse $u$ ist mit der Massendichte $\mu$ im Ruhesystem der Materie durch

$$\mu = \varrho(1 + u/c^2) \qquad (8,75)$$

verknüpft, und der Wärmestrom $q^i$ (Impulsstromdichte im Ruhesystem) geht in den Entropiestrom

$$s^i = \varrho s u^i + q^i/T \tag{8,76}$$

ein. Gl. (8,76) besagt, daß Entropie dadurch strömt, daß sie mit der Masse konvektiv mitgeführt wird (erster Term) oder durch Wärmeströmung transportiert wird (Verallgemeinerung von $dS = dQ/T$).

Wir wollen jetzt einen expliziten Ausdruck für die Entropieproduktionsdichte $\sigma$ gewinnen. Unter Verwendung von (8,70) und der aus (8,68), (8,69) und (8,75) folgenden Gleichung

$$s_{,n} u^n = \frac{1}{T} \left(\frac{\mu c^2}{\varrho}\right)_{,n} u^n + \frac{p}{T} \left(\frac{1}{\varrho}\right)_{,n} u^n = \frac{1}{\varrho T} \left[(p + \mu c^2)\, u^i{}_{;i} + \mu_{,n} u^n c^2\right] \tag{8,77}$$

erhalten wir zunächst

$$\sigma = s^n{}_{;n} = \frac{1}{T} \left[(p + \mu c^2)\, u^i{}_{;i} + \mu_{,n} u^n c^2\right] + \left(\frac{q^n}{T}\right)_{;n}. \tag{8,78}$$

Da sich die Terme in der eckigen Klammer in der Form

$$(p + \mu c^2)\, u^i{}_{;i} + \mu_{,n} u^n c^2 = (\mu u_a u_b + p h_{ab})^{;b}\, u^a \tag{8,79}$$

schreiben lassen und die Divergenz des Energieimpulstensors verschwindet, folgt aus (8,78) die Beziehung

$$\sigma = [T^{mn} - \mu u^m u^n - p h^{mn}]_{;m} \frac{u_n}{T} + \left(\frac{q^n}{T}\right)_{;n}, \tag{8,80}$$

die unter Beachtung der Definition (8,74) von $q^n$ und unter Benutzung von (5,32) schließlich auf

$$\begin{aligned} \sigma &= -(T^{mn} - \mu u^m u^n - p h^{mn}) \left(\frac{u_m}{T}\right)_{;n} \\ &= -\frac{1}{2} (T^{mn} - \mu u^m u^n - p h^{mn}) \underset{u_a/T}{\pounds}\, g_{mn} \end{aligned} \tag{8,81}$$

führt.

In der irreversiblen Thermodynamik kann man in vielen Fällen die Forderung $\sigma \geqq 0$ dadurch erfüllen, daß man die rechte Seite von (8,81) als positiv definite quadratische Form schreibt, d. h. lineare Ansätze macht. Im Spezialfall $\pi^{mn} = 0$, in dem sich (8,81) wegen (8,74) auf

$$\sigma = -q_a \frac{c^2}{T^2} \left(\frac{T}{c^2}\, \dot{u}^a + T^{,a}\right), \qquad \dot{u}^a \equiv u^a{}_{;n} u^n \tag{8,82}$$

reduziert, bedeutet dies den Ansatz

$$q_a = -\varkappa (T_{,n} + \dot{u}_n T/c^2)\, h_a{}^n, \tag{8,83}$$

der die relativistische Verallgemeinerung der linearen Beziehung zwischen Wärmestrom und Temperaturgradient darstellt.

In vielen Fällen kann man irreversible Vorgänge vernachlässigen. Vollständige, exakte Reversibilität ($\sigma = 0$) ist — wenn das System im Sinne von (8,68) durch nur zwei Zustandsgrößen bestimmt ist — wegen (8,81) entweder nur für bestimmte Metriken möglich (deren Lie-Ableitung verschwindet) oder für besonders einfache Medien, deren Energieimpulstensor die Gestalt

$$T^{mn} = \mu u^m u^n + p h^{mn} = (\mu + p/c^2)\, u^m u^n + p g^{mn} \tag{8,84}$$

hat. Ein solches Medium heißt *ideale Flüssigkeit* oder, für $p = 0$, *inkohärente Materie.*

## 8.6. Ideale Flüssigkeit und inkohärente Materie

Entsprechend der in Abschnitt 8.5. gegebenen Definition ist eine ideale Flüssigkeit durch die Gestalt (8,84) des Energieimpulstensors gekennzeichnet.

Die Bewegungsgleichungen dieser Flüssigkeit lauten unter Benutzung der Schreibweise $\dot\mu = \mu_{,n} u^n$, $\dot u^n = u^n{}_{;i} u^i$ usw.

$$T^{mn}{}_{;n} = (\mu + p/c^2)\, u^n{}_{;n} u^m + (\mu + p/c^2)^{\cdot}\, u^m + (\mu + p/c^2)\, \dot u^m + p^{,m} = 0. \tag{8,85}$$

Überschieben mit $u_m/c^2$ gibt die Energiebilanz

$$\dot\mu + (\mu + p/c^2)\, u^n{}_{;n} = 0 \tag{8,86}$$

und Überschieben mit dem Projektionstensor $h^i_m = g^i_m + u^i u_m/c^2$ die Impulsbilanz

$$(\mu + p/c^2)\, \dot u^i + h^{im} p_{,m} = 0. \tag{8,87}$$

Gl. (8,87) zeigt, daß auch der Druck zur Trägheit des Materieelementes beiträgt; das klassische Analogon dieser Gleichung ist ja

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p. \tag{8,88}$$

Die Bewegungsgleichungen (8,86) bis (8,87) müssen in jedem konkreten Fall noch durch die Angabe einer Zustandsgleichung ergänzt werden. Als einfachste Zustandsgleichung kann man die der inkohärenten Materie ansehen: $p = 0$. Aus ihr und den Bewegungsgleichungen folgt

$$\dot u^m = \mathrm{D}u^m/\mathrm{D}\tau = 0, \qquad (\mu u^n)_{;n} = 0, \tag{8,89}$$

d. h., die Stromlinien der Materie sind Geodäten, und die Ruhemasse $\mu$ bleibt erhalten.

## 8.7. Andere physikalische Grundgesetze

Ähnlich wie bei den ausführlicher dargestellten Beispielen der Punktmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik und Mechanik der Kontinua kann man auch die Grundgesetze anderer klassischer Theorien, z. B. Dirac-Gleichung, Weyl-Gleichung für das Neutrinofeld, Klein-Gordon-Gleichung, auf den Riemannschen Raum übertragen. Obwohl die Grundlagen dieser Theorien gut ausgearbeitet sind, fehlt es doch an überzeugenden Beispielen und Anwendungen innerhalb der Gravitationstheorie;

wir werden deshalb nicht näher auf sie eingehen. Wichtig für die Einsteinsche Gravitationstheorie wird allerdings die Eigenschaft abgeschlossener Systeme (d. h. Systeme, auf die keine Kräfte wirken, deren Ursachen außerhalb des Systems liegen) sein, daß ihr Energieimpulstensor $T_{mn}$ symmetrisch ist (als Ausdruck des Drehimpulserhaltungssatzes in der Speziellen Relativitätstheorie) und seine Divergenz verschwindet (Verallgemeinerung des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes der Speziellen Relativitätstheorie):

$$T_{mn} = T_{nm}, \qquad T^{mn}{}_{;n} = 0. \tag{8,90}$$

Etwas anders liegen die Dinge bei den Grundgesetzen der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie. Hier gibt es zwar einige Arbeiten zu speziellen Fragen, von einer wirklichen Synthese zwischen Quantentheorie und Gravitationstheorie kann aber noch nicht gesprochen werden (vgl. Kapitel 30.).

*Literatur zu Kapitel 8.:*

[15], [19], [60], [71], [117], [122], [123], [124], [131], [149], [151], [171].

# Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie

## 9. Die Grundgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie

### 9.1. Die Einsteinschen Feldgleichungen

Wie wir bereits mehrfach erläutert haben, besteht die Grundidee der Einsteinschen Theorie der Gravitation darin, die Schwerkraft zu geometrisieren, d. h., alle Eigenschaften der Schwerkraft und ihrer Einwirkung auf physikalische Vorgänge auf die Eigenschaften eines Riemannschen Raumes abzubilden. Während wir uns bisher immer nur mit der mathematischen Struktur eines solchen Raumes und der Einwirkung eines vorgegebenen Riemannschen Raumes auf physikalische Gesetze beschäftigt haben, wollen wir uns jetzt der eigentlichen physikalischen Frage zuwenden: Schwerefelder werden von Massen erzeugt — wie werden die Eigenschaften des Riemannschen Raumes aus der Materieverteilung berechnet? „Materie" ist dabei im Sprachgebrauch der Allgemeinen Relativitätstheorie alles das, was ein Schwerefeld erzeugen kann (zum Energieimpulstensor beiträgt), z. B. Atomkerne, Elektronen, aber auch das elektromagnetische Feld; dieser Materiebegriff ist also enger als der in der marxistisch-leninistischen Philosophie benutzte.

Natürlich kann man das neue, in dieser Frage gesuchte physikalische Grundgesetz nicht logisch aus den schon bekannten Gesetzen ableiten; man kann aber einige sehr plausible Forderungen aufstellen. Wir werden dies im folgenden tun und überraschenderweise merken, daß — akzeptiert man einmal den Riemannschen Raum — sich die Einsteinschen Feldgleichungen ziemlich zwangsläufig ergeben.

Folgende Forderungen scheinen vernünftig zu sein:

a) Die Feldgleichungen sollen Tensorgleichungen sein (Unabhängigkeit der Naturgesetze vom Koordinatensystem).

b) Wie alle anderen Feldgleichungen der Physik sollen es partielle Differentialgleichungen maximal zweiter Ordnung für die zu bestimmenden Funktionen (die Komponenten des metrischen Tensors $g_{mn}$) sein, die linear in den höchsten vorkommenden Ableitungen sind.

c) Sie sollen (bei geeigneten Vernachlässigungen) in die Poisson- (Potential-) Gleichung

$$\Delta U = 4\pi f \mu \tag{9,1}$$

der Newtonschen Gravitationstheorie übergehen ($U$ Potential, $f$ Newtonsche Gravitationskonstante, $\mu$ Massendichte).

d) Da der Energieimpulstensor $T^{mn}$ das speziell-relativistische Analogon der Massendichte ist, soll er Ursache (Quelle) des Gravitationsfeldes sein.

e) Wenn der Raum flach ist, soll $T^{mn}$ verschwinden.

Wir wollen nun sehen, wohin uns diese Forderungen führen. Offenbar brauchen wir einen Tensor (a), der nur Ableitungen der Metrik bis zur zweiten Ordnung enthält

(b); als Bauelemente für diesen *Einstein-Tensor* $G_{mn}$ stehen uns aber damit, wie wir in Abschnitt 6.3. gezeigt haben, nur der Krümmungstensor, der metrische Tensor und der $\varepsilon$-Tensor zur Verfügung. Forderung (d) bedeutet, daß die Feldgleichungen die Struktur

$$G_{mn} = \varkappa T_{mn} \tag{9,2}$$

haben, mit einer noch zu bestimmenden Naturkonstante $\varkappa$; dies ist mit der Divergenzfreiheit und Symmetrie (8,90) des Energieimpulstensors nur für

$$G^{mn}{}_{;n} = 0 \qquad G_{mn} = G_{nm} \tag{9,3}$$

verträglich. Es gibt nun, wie man zeigen kann, nur einen in den Komponenten des Krümmungstensors linearen (b) Tensor, der (9,3) erfüllt, nämlich $R_{mn} - g_{mn}R/2$, der uns schon bei der Diskussion der Bianchi-Identitäten in (6,30) begegnete. Da auch der metrische Tensor selbst (9,3) erfüllt, hat $G^{mn}$ die Gestalt

$$G^{mn} = R^{mn} - \tfrac{1}{2}\, g^{mn} R + \Lambda g^{mn}. \tag{9,4}$$

Die Naturkonstante $\Lambda$ ist die schon von EINSTEIN diskutierte *kosmologische Konstante*. Wenn sie nicht verschwindet, würde ein vollkommen materiefreier Raum ($T^{mn} = 0$) im Widerspruch zu Forderung (e) immer gekrümmt sein, da wegen (9,2) und (9,4) der Ricci-Tensor $R^{mn}$ nicht verschwinden kann. Diese Forderung (e) ist aber schwer nachprüfbar. $\Lambda = 0$ oder $\Lambda \neq 0$ kann nur durch Beobachtungen anhand kosmologischer Modelle entschieden werden. Wir werden mit $\Lambda = 0$ rechnen, können aber bei einer Reihe von Beispielen auch den Einfluß des Termes $\Lambda g^{mn}$ diskutieren, indem wir ihn in (9,2) auf die rechte Seite gebracht denken und formal als Teil des Energieimpulstensors betrachten.

Der Einstein-Tensor hat also die Gestalt

$$G_{mn} = R_{mn} - \tfrac{1}{2}\, R g_{mn}. \tag{9,5}$$

Für praktische Rechnungen ist oft die Verwendung der expliziten Darstellung

$$\begin{aligned} G^1_1 &= -\,(R^{23}{}_{23} + R^{24}{}_{24} + R^{34}{}_{34}),\\ G^2_2 &= -\,(R^{13}{}_{13} + R^{14}{}_{14} + R^{34}{}_{34}),\\ G^1_2 &= R^{31}{}_{32} + R^{41}{}_{42},\\ G^2_3 &= R^{12}{}_{13} + R^{42}{}_{43}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{9,6}$$

durch die Komponenten des Krümmungstensors nützlich.

Unsere Forderungen haben uns in ziemlich eindeutiger Weise auf die *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$G_{mn} = R_{mn} - \tfrac{1}{2}\, R g_{mn} = \varkappa T_{mn} \tag{9,7}$$

geführt. EINSTEIN selbst stellte sie, nach etwa zehnjähriger Forschungsarbeit, im Jahre 1915 auf. Das Naturgesetz (9,7) zeigt, wie die Raumkrümmung (repräsentiert durch den Ricci-Tensor $R_{mn}$) durch die Materieverteilung (repräsentiert durch den Energieimpulstensor $T_{mn}$) verursacht wird.

Die Feldgleichungen (9,7) sind ein System von 10 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 10 metrischen Funktionen $g_{mn}$. Selbst bei festen Anfangsbedingungen darf dieses System aber nicht eindeutig lösbar sein, es müssen immer noch beliebige

Koordinatentransformationen durchgeführt werden können. In der Tat wird genau diese Unterbestimmtheit des Feldgleichungssystems durch das Bestehen der verjüngten Bianchi-Identitäten

$$G^{mn}{}_{;n} = \varkappa T^{mn}{}_{;n} = 0 \tag{9,8}$$

gewährleistet. Diese bringen ja gerade zum Ausdruck, daß die 10 Feldgleichungen (9,7) nicht unabhängig voneinander sind.

Die Gl. (9,8) gestattet noch eine andere, physikalisch sehr bedeutsame Interpretation und Schlußfolgerung: Da die Divergenz des Einstein-Tensors $G^{mn}$ identisch verschwindet, sind die Einsteinschen Feldgleichungen überhaupt nur für $T^{mn}{}_{;n} = 0$ integrabel und in sich widerspruchsfrei. Die kovariante Ableitung in dieser Bedingung ist aber bezüglich *der* Metrik $g_{mn}$ zu berechnen, die gerade aus diesem Energieimpulstensor erst bestimmt werden soll! Es ist also prinzipiell unmöglich, sich die raum-zeitliche Verteilung der Materie (die Materie und ihre Bewegung) vorzugeben und daraus die Raumstruktur zu berechnen. Raumstruktur (Krümmung) und Bewegung der Materie in diesem Raum bilden ein so eng miteinander gekoppeltes dynamisches System, daß es nur simultan gelöst werden kann. Der Raum ist nicht Schauplatz des physikalischen Geschehens, sondern ein Aspekt der Wechselwirkung und Bewegung der Materie.

Gelegentlich kann man in guter Näherung annehmen, daß die Raumstruktur durch einen Teil des Energieimpulstensors bestimmt wird (z. B. durch die Massen der Sterne) und der Rest (z. B. das Licht der Sterne) die Krümmung nicht mehr verändert. Man spricht dann von Testfeldern: Es sind Felder, die nicht Ursache von neuen Gravitationsfeldern sind, sondern nur von den schon vorhandenen Gravitationsfeldern beeinflußt werden und damit zum Nachweis von Eigenschaften dieser Felder dienen; sie treten nicht auf der rechten Seite der Feldgleichungen (9,7) auf.

## 9.2. Der Newtonsche Grenzfall

In jeder neuen physikalischen Theorie ist die vorhergehende als Grenzfall enthalten — diese Erfahrung bestätigt sich auch in der Gravitationstheorie. Aufgabe dieses Abschnitts ist es, den Zusammenhang zwischen den Einsteinschen Gleichungen (9,7) und der Newtonschen Gravitationstheorie herzustellen und dabei auch die physikalische Bedeutung der in (9,7) eingeführten Naturkonstante $\varkappa$ zu klären.

Wir müssen zunächst definieren, was wir unter Newtonschem Grenzfall verstehen wollen. In der Newtonschen Gravitationstheorie ist die Massendichte $\mu$ die einzige Quelle des Feldes. Bei den Anwendungen, bei denen sie nachprüfbar richtige Vorhersagen macht, wie z. B. bei der Planetenbewegung, sind im Ruhesystem des Schwerpunktes der felderzeugenden Massen, z.B. der Sonne, alle Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit. Folgende Charakterisierung des Newtonschen Grenzfalls ist also sinnvoll:

1. Es gibt ein Koordinatensystem, in dem die Energiedichte

$$T_{44} = \mu c^2 \tag{9,9}$$

die wesentliche Quelle des Gravitationsfeldes ist und alle anderen Komponenten des Energieimpulstensors vernachlässigbar klein sind.

2. Die Felder sind nur langsam veränderlich; Ableitungen nach $x^4 = ct$, die ja den Faktor $c^{-1}$ enthalten, sind zu vernachlässigen.

3. Die Metrik weicht nur wenig von der eines Minkowski-Raumes ab:

$$g_{nm} = \eta_{nm} + f_{nm}, \qquad \eta_{nm} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{9,10}$$

Terme, die in $f_{nm}$ und seinen Ableitungen quadratisch sind, werden vernachlässigt, die Einsteinschen Feldgleichungen werden linearisiert (vgl. Abschnitt 13.2.).

Diese drei Punkte haben wir jetzt in die Feldgleichungen (9,7) einzuarbeiten.

Durch Verjüngung folgt allgemein aus (9,7) die Beziehung

$$-R = \varkappa T^a{}_a = \varkappa T, \tag{9,11}$$

so daß man die Einsteinschen Gleichungen auch in der Form

$$R_{mn} = \varkappa(T_{mn} - \tfrac{1}{2} g_{mn} T) \tag{9,12}$$

schreiben kann. Von diesen 10 Gleichungen ist in der Newtonschen Näherung nur

$$R_{44} = \varkappa \left(T_{44} - \frac{1}{2}\eta_{44} T\right) = \varkappa \left(\mu c^2 - \frac{1}{2}\mu c^2\right) = \frac{\varkappa}{2}\mu c^2 \tag{9,13}$$

von Interesse. Zur Berechnung von $R_{44}$ aus der Metrik (9,10) gehen wir von der Definitionsgleichung (6,3) des Krümmungstensors aus und vernachlässigen die in den Christoffel-Symbolen quadratischen Glieder, d. h., wir benutzen

$$R^a{}_{mbn} = \Gamma^a_{mn,b} - \Gamma^a_{mb,n} = \tfrac{1}{2}\eta^{as}(f_{sn,mb} + f_{mb,sn} - f_{mn,bs} - f_{bs,mn}). \tag{9,14}$$

Es gilt dann

$$R_{44} = R^a{}_{4a4} = \tfrac{1}{2}\eta^{as}(f_{s4,a4} + f_{a4,s4} - f_{44,as} - f_{as,44}),$$

bei Vernachlässigung aller Zeitableitungen also

$$R_{44} = -\tfrac{1}{2}\eta^{as} f_{44,as} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} f_{44,\alpha\sigma} = -\tfrac{1}{2}\Delta f_{44}, \tag{9,15}$$

und die Feldgleichung (9,13) vereinfacht sich zu

$$\Delta f_{44} = -\varkappa\mu c^2. \tag{9,16}$$

Diese Gleichung hat schon die Struktur einer Poisson-Gleichung — aber nicht jede Größe, die einer Poisson-Gleichung genügt, muß mit dem Newtonschen Gravitationspotential übereinstimmen! Um bei der physikalischen Interpretation von Gl. (9,16) nicht fehlzugehen, brauchen wir noch eine zusätzliche Information, die uns die Geodätengleichung

$$\frac{d^2x^n}{d\tau^2} = -\Gamma^n_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} \tag{9,17}$$

gibt. Für langsam bewegte Teilchen (z. B. Planeten) stimmt die Eigenzeit $\tau$ mit der Koordinatenzeit $t = x^4/c$ fast überein, und die Vierergeschwindigkeit auf der rechten

Seite von (9,17) kann durch $u^a = (0, 0, 0, c)$ ersetzt werden:

$$\frac{d^2x^\nu}{dt^2} = -\Gamma^\nu_{44}c^2 = \frac{1}{2}\,\eta^{\nu\mu}g_{44,\mu}c^2 = \frac{1}{2}\,\eta^{\nu\mu}f_{44,\mu}c^2. \tag{9,18}$$

Vergleichen wir diese Bewegungsgleichung mit der eines Teilchens im Gravitationspotential $U$, also mit

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\mathrm{grad}\,U, \tag{9,19}$$

dann sehen wir, daß das Newtonsche Gravitationspotential $U$ mit der Metrik durch die Beziehung

$$U = -c^2f_{44}/2, \qquad g_{44} = -(1 + 2U/c^2) \tag{9,20}$$

verknüpft ist und daß wegen (9,1), (9,16) und (9,20) zwischen der Newtonschen Gravitationskonstanten $f$ und der Einsteinschen Naturkonstanten $\varkappa$ die Relation

$$8\pi f/c^4 = \varkappa = 2{,}07 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{s}^2 \tag{9,21}$$

besteht. Damit ist der gesuchte Zusammenhang zwischen Newtonscher und Einsteinscher Gravitationstheorie hergestellt.

Die Beziehung (9,20) zwischen $g_{44}$ und dem Potential $U$ steht in Übereinstimmung mit Gl. (8,17), da ja für kleine Raumbereiche $U(x^\nu) = U_{,\nu}x^\nu = a_\nu x^\nu$ gilt ($a_\nu = +U_{,\nu}$, weil es sich um die vom frei fallenden Inertialsystem aus gesehenen Komponenten der Beschleunigung handelt).

### 9.3. Die Bewegungsgleichung von Testteilchen

*Polteilchen.* Es ist einer der besonderen Vorzüge der Einsteinschen Theorie, daß in ihr die Bewegungsgleichungen eine Folge der Feldgleichungen sind. Nehmen wir zum Beispiel die Maxwell-Theorie, so ist dort zwar die Ladungserhaltung eine Folge der Feldgleichungen, aber die Bewegung der Quellen, die Verteilung der Ladungen sind (mit der Einschränkung der Ladungserhaltung) beliebig vorgebbar. So ist das Feld zweier in endlicher Entfernung voneinander ruhender Punktladungen eine strenge Lösung der Maxwell-Gleichungen — obwohl doch die Ladungen Kräfte aufeinander ausüben und sich daher sofort beschleunigt bewegen würden.

Noch nach der Aufstellung der Einsteinschen Feldgleichungen glaubte man, die Geodätengleichung als Bewegungsgleichung von Testteilchen zusätzlich fordern zu müssen, erkannte dann aber, daß sie eine Folgerung aus der in der Einsteinschen Theorie immer gültigen Beziehung

$$T^{mn}{}_{;n} = 0 \tag{9,22}$$

ist, also eine Folge der lokalen Energieimpulserhaltung.

Um dies zu zeigen, brauchen wir zunächst den Energieimpulstensor eines punktförmigen Teilchens konstanter Ruhemasse $m$. Wir erhalten ihn, indem wir von dem Tensor $T^{nm} = \mu u^n u^m$ der inkohärenten Materie ausgehen und unter Benutzung der

durch

$$\int F(x^i)\,\frac{\delta^4[x^n - a^n]}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = F(a^n),$$

$$\delta^4(x^n) = \delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)\,\delta(x^4), \tag{9,23}$$

$$\int f(\lambda)\,\frac{\mathrm{d}\delta(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \equiv -\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\,\delta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

definierten vierdimensionalen $\delta$-Funktion den Übergang zum punktförmigen Teilchen durchführen:

$$T^{ik}(y^n) = mc\int \frac{\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g(x^a)}}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{9,24}$$

Im lokalen Minkowski-Ruhesystem $\left(\sqrt{-g} = 1,\ t = \tau,\ x^\nu = 0\right)$ entspricht dem genau der Übergang

$$\mu \to m\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \tag{9,25}$$

von einer kontinuierlichen Massenverteilung zur Punktmasse.

Wir gehen nun mit dem Energieimpulstensor (9,24) in die Gl. (9,22) ein. Die partiellen Ableitungen können wir unter Verwendung von (9,23) und (3,14) umformen:

$$\begin{aligned}
T^{ik}{}_{,k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial y^k} &= mc\int \frac{\frac{\partial}{\partial y^k}\,\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g(x^a)}}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= -mc\int \frac{\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g(x^a)}}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= mc\int \delta^4[y^n - x^n(\tau)]\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\right)\mathrm{d}\tau \\
&= mc\int \frac{\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2} - \Gamma^a_{ab}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Aus (9,22) folgt damit

$$\begin{aligned}
0 = T^{ik}{}_{;k} &= T^{ik}{}_{,k} + \Gamma^i_{nk}T^{nk} + \Gamma^k_{nk}T^{in} \\
&= mc\int \frac{\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2} - \Gamma^a_{ak}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^i_{nk}\,\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\right. \\
&\qquad \left. + \Gamma^a_{ak}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

also

$$0 = mc\int \frac{\delta^4[y^n - x^n(\tau)]}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\mathrm{D}^2x^i}{\mathrm{D}\tau^2}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{9,26}$$

Auf der Weltlinie $y^n = x^n(\tau)$ des Teilchens kann diese Gleichung nur für

$$\frac{D^2 x^i}{D\tau^2} = 0 \tag{9,27}$$

erfüllt werden, das Teilchen muß sich auf einer Geodäten bewegen.

Auf den ersten Blick ist vielleicht nicht zu sehen, wo in dieser etwas formalen Ableitung eigentlich vorausgesetzt wurde, daß es sich um ein *Test*teilchen handelt. Das von einem punktförmigen Teilchen erzeugte Gravitationsfeld wird am Ort des Teilchens aber sicher nicht regulär sein (auch das elektrische Feld ist am Ort einer Punktladung singulär), so daß Metrik und Christoffel-Symbole dort gar nicht existieren.

*Spinteilchen.* Ein ausgedehnter Körper, z. B. ein Planet, wird sich im allgemeinen nicht exakt auf einer Geodäten bewegen. Dies liegt weniger an dem vom Körper selbst hervorgerufenen Gravitationsfeld als vielmehr an der Wirkung von „Gezeitenkräften": Wegen der Raumkrümmung ist der Abstand benachbarter Geodäten nicht konstant (vgl. Abschnitt 1.4.), die Gravitationskräfte (die versuchen, jeden Punkt des Körpers auf einer Geodäten zu bewegen) deformieren den Körper, ändern seinen Rotationszustand und führen damit zu einer komplizierten Bahnkurve. Man kann einen Teil dieser Effekte berücksichtigen, indem man zwar vom Modell eines punktförmigen Körpers ausgeht, ihm aber außer der Masse noch höhere Momente (Dipolmoment, Spin) zuordnet. Mathematisch geschieht dies dadurch, daß man zu seiner Beschreibung nicht nur $\delta$-Funktionen, sondern auch deren Ableitungen benutzt.

Da wir später an der Wirkung des Gravitationsfeldes auf einen Kreisel interessiert sein werden, sollen die Bewegungsgleichungen eines Spin- (Pol-Dipol-) Teilchens kurz dargestellt werden; wegen der Einzelheiten und Beweise verweisen wir auf die umfangreiche Literatur zu diesem Problem.

Ein ausgedehnter Körper kann näherungsweise durch seine Masse $m(\tau)$, die Vierergeschwindigkeit $u^a(\tau)$ eines geeignet gewählten Punktes und den antisymmetrischen Spintensor $S^{ab}(\tau)$ beschrieben werden. Aus der Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors

$$T^{ik}(y^n) = c \int \frac{1}{\sqrt{-g}} \Bigg[ \delta^4[y^n - x^n(\tau)] \left( m u^i u^k + \frac{1}{2c^2} \dot{S}^{ni} u_n u^k + \frac{1}{2c^2} \dot{S}^{nk} u_n u^i \right) - \left\{ \delta^4[y^n - x^n(\tau)] \frac{1}{2} (S^{mi} u^k + S^{mk} u^i) \right\}_{;m} \Bigg] d\tau \tag{9,28}$$

folgen dann die Bewegungsgleichungen

$$\frac{D}{D\tau} S^{ab} \equiv \dot{S}^{ab} = \frac{1}{c^2} (u_n \dot{S}^{na} u^b - u_n \dot{S}^{nb} u^a) \tag{9,29}$$

und

$$\frac{D}{D\tau} \left( m u^a + \frac{1}{c^2} u_b \dot{S}^{ba} \right) = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} S^{dc} u^b . \tag{9,30}$$

Von diesen Gleichungen sind, wie ein Überschieben mit $u^a$ zeigt, nur 7 unabhängig; sie reichen also zur Bestimmung der insgesamt 10 unbekannten Funktionen ($m$, $S^{ab}$, 3 Komponenten von $u^a$) nicht aus. Der physikalische Grund dafür liegt darin, daß $S^{ab}$, wie Drehimpuls oder Dipolmoment in der Newtonschen Mechanik, vom Bezugs-

punkt abhängt und wir diesen Punkt und seine Weltlinie noch nicht fixiert haben. Wir definieren die Bezugsweltlinie $x^a(\tau)$ jetzt dadurch, daß im momentanen Ruhesystem eines sich auf ihr bewegenden Beobachters das Dipolmoment des Körpers Null ist. Da die Gesamtmasse positiv ist, existiert eine solche Linie immer. Eine mögliche Übersetzung dieser Bedingung ist, wie man zeigen kann,

$$S^{ab}u_b = 0. \tag{9,31}$$

Wegen dieser Nebenbedingung hat der antisymmetrische Tensor $S^{ab}$ nur drei unabhängige Komponenten, die sich gemäß

$$S_a = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{abmn}u^b S^{mn}, \qquad S^{mn} = \frac{1}{c^2}\,\varepsilon_{aqnm}S^a u^q \tag{9,32}$$

eindeutig auf den *Spinvektor* (*Eigendrehimpulsvektor*) $S_a$ abbilden lassen.

Einsetzen von (9,31) und (9,32) in die Bewegungsgleichungen (9,29) bis (9,30) ergibt

$$\frac{\mathrm{D}S_a}{\mathrm{D}\tau} = \frac{1}{c^2}\,u_a S_n\,\frac{\mathrm{D}u^n}{\mathrm{D}\tau}, \tag{9,33}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,m = 0, \tag{9,34}$$

$$m\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,u^a = -\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{arqp}S_r u_q\,\frac{\mathrm{D}^2u_p}{\mathrm{D}\tau^2} + \frac{1}{2c^2}\,R^a{}_{bcd}\varepsilon^{cdpq}S_p u_q u_b. \tag{9,35}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt, daß der Spinvektor $S_a$ längs der Bahnkurve nach Fermi-Walker transportiert wird [vgl. (5,24), mit $S^n u_n = 0$]; dabei bleibt sein Betrag konstant:

$$S^a S_a = \text{const.} \tag{9,36}$$

Aus der dritten Gleichung (9,35) sehen wir, daß sich der durch (9,31) definierte Punkt nicht auf einer Geodäten bewegt; dieser Effekt wird im allgemeinen zu vernachlässigen sein.

Die Spinbewegungsgleichung (9,33) gilt auch dann, wenn zusätzliche nichtgravitative Kräfte wirken, solange nur diese Kräfte kein Drehmoment auf den Körper ausüben. Ein Beobachter kann also sein nach Fermi-Walker transportiertes Dreibein durch die Achsrichtungen dreier kräftefrei gelagerter Kreisel realisieren.

## 9.4. Das Variationsprinzip der Einsteinschen Theorie

Alle bekannten, physikalisch bedeutsamen Grundgleichungen klassischer Felder lassen sich aus einem Variationsprinzip ableiten — auch die Einsteinschen Feldgleichungen. Welche Anforderungen muß man nun an die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}$ stellen, damit aus

$$\delta \int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x = 0 \tag{9,37}$$

gerade die Feldgleichungen (9,7) folgen? Natürlich muß in (9,37) eine invariante Größe stehen, d. h., $\mathscr{L}$ muß das Produkt aus einem Skalar $L$ und $\sqrt{-g}$ sein. Für das reine

Gravitationsfeld gibt es aber nur einen einzigen Skalar, der die ersten Ableitungen der Metrik quadratisch und die zweiten Ableitungen linear enthält, nämlich die skalare Krümmung $R$ (es gibt keinen Skalar, der nur erste Ableitungen enthält). Da auch die Materie in $L$ repräsentiert sein muß, koppeln wir sie — wie in der Feldtheorie üblich — dadurch an, daß wir einen von der Materieverteilung (z. B. von einem elektromagnetischen Feld) herrührenden Teil $\varkappa \overset{\mathrm{M}}{L}$ einfach addieren. Unser Variationsprinzip lautet also — bei zweckmäßiger Wahl der Vorfaktoren —

$$\delta W = \delta \int \left(\frac{R}{2} + \varkappa \overset{\mathrm{M}}{L}\right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x = 0 \tag{9,38}$$

(HILBERT 1915). Wir werden jetzt zeigen, daß aus diesem Ansatz wirklich die Einsteinschen Feldgleichungen (9,7) folgen.

Als Grundgrößen des Gravitationsfeldes, die unabhängig voneinander zu variieren sind, werden wir natürlich die Komponenten des metrischen Tensors $g_{mn}$ nehmen. (Variiert man in (9,38) die in $\overset{\mathrm{M}}{L}$ enthaltenen nichtmetrischen Feldgrößen, erhält man die entsprechenden Feldgleichungen, z. B. die Maxwell-Gleichungen.) Wie bei Wirkungsintegralen mit zweiten Ableitungen üblich, werden die Variationen $\delta g_{mn}$ der Grundgrößen und die Variationen ihrer ersten Ableitungen (zusammengefaßt in den Variationen $\delta \Gamma^n_{ab}$ der Christoffel-Symbole) dadurch eingeschränkt, daß sie auf der Oberfläche des vierdimensionalen Integrationsgebietes verschwinden. Unser erstes Ziel ist es, die in der Gleichung

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \Big[R\delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, R_{mn} \delta g^{mn} + \sqrt{-g}\, g^{mn}\, \delta R_{mn} + \delta\big(2\varkappa \overset{\mathrm{M}}{L} \sqrt{-g}\big)\Big]\, \mathrm{d}^4x = 0 \tag{9,39}$$

auftretenden Variationen durch $\delta g_{mn}$ auszudrücken.

Aus den im Abschnitt 3.2. dargestellten Eigenschaften des metrischen Tensors und seiner Determinante erhalten wir sofort

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\delta g_{mn}}\, \partial g_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{mn} \delta g_{mn} \tag{9,40}$$

und

$$\delta g^{mn} = -g^{ma} g^{nb}\, \delta g_{ab}\,. \tag{9,41}$$

Die Definitionsgleichungen (6,3) und (6,21) des Krümmungs- bzw. Ricci-Tensors führen auf

$$\delta R_{mn} = -(\delta \Gamma^a_{ma})_{,n} + (\delta \Gamma^a_{mn})_{,a} - \delta(\Gamma^a_{rn} \Gamma^r_{ma} - \Gamma^a_{ra} \Gamma^r_{mn})\,. \tag{9,42}$$

Bei der späteren Auswertung des Variationsprinzips wird es nur auf die Struktur des Terms mit $\delta R_{mn}$ ankommen, die durch direktes Ausrechnen aus (9,42) nur schlecht sichtbar wird. Wir schreiben deshalb das Ergebnis

$$\begin{aligned} g^{mn} \delta R_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g}\, (g^{mn} \delta \Gamma^a_{mn} - g^{ma} \delta \Gamma^n_{mn})\right]_{,a} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, F^a\right)_{,a} = F^a_{;a} \end{aligned} \tag{9,43}$$

ohne Rechnung auf und beweisen die Richtigkeit dieser Gleichung, indem wir zeigen, daß sie eine Tensorgleichung ist und daß sie in einem speziellen Koordinatensystem erfüllt ist.

Die Tensoreigenschaft der Gl. (9,43) folgt daraus, daß sowohl die Differenz $\delta\Gamma^a_{mn}$ von Christoffel-Symbolen (die störenden Terme in (3,23) heben sich bei der Differenzbildung heraus) als auch die $\delta R_{mn}$ Tensoren sind. Die Gl. (9,43) ist offensichtlich in lokal geodätischen Koordinaten richtig: Für $\sqrt{-g} = 1$, $g^{mn}{}_{,a} = 0$, $\Gamma^a_{bc} = 0$ führen (9,42) und (9,43) auf dieselbe Gleichung, nämlich auf

$$g^{mn}\delta R_{mn} = (g^{mn}\delta\Gamma^a_{mn} - g^{ma}\delta\Gamma^n_{mn})_{,a} = g^{mn}(\delta\Gamma^a_{mn,a} - \delta\Gamma^a_{ma,n}). \tag{9,44}$$

Den letzten Term in Gl. (9,39) können wir nur bei genauer Kenntnis der Lagrange-Funktion $\overset{M}{L}$ der Materie wirklich ausrechnen. Um $\overset{M}{L}$ zu gewinnen, werden wir die übliche Übersetzungsvorschrift zu Hilfe nehmen: Man gehe von der entsprechenden speziell-relativistischen Lagrange-Funktion aus, ersetze die partiellen Ableitungen durch kovariante und bilde Skalarprodukte statt mit $\eta_{nm}$ jetzt mit $g_{nm}$. $\overset{M}{L}$ wird also zwar Christoffel-Symbole, aber keine zweiten Ableitungen der Metrik enthalten, es ist ja im allgemeinen aus ersten Ableitungen der Feldgrößen und diesen selbst aufgebaut. Wir können deshalb allgemein

$$\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right) = \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\delta g_{mn}}\,\delta g_{mn} + \left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial \overset{M}{L}}{\partial g_{mn,a}}\,\delta g_{mn}\right)_{,a} \tag{9,45}$$

schreiben, wobei wir die übliche Abkürzung

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\partial g_{mn}} - \left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\partial g_{mn,a}}\right)_{,a} \tag{9,46}$$

für die sogenannte Variationsableitung benutzt haben.

Setzen wir jetzt (9,40), (9,41), (9,43) und (9,45) in das Variationsprinzip (9,39) ein, erhalten wir

$$\delta W = \frac{1}{2}\int\Bigg[\left(\frac{1}{2}\,g^{mn}R - R^{mn} + \varkappa\,\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\delta g_{mn}}\right)\delta g_{mn} + F^a{}_{;a} + \frac{2\varkappa}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial \overset{M}{L}}{\partial g_{mn,a}}\,\delta g_{mn}\right)_{,a}\Bigg]\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0. \tag{9,47}$$

Das Integral über die beiden letzten Summanden können wir mit Hilfe des Gaußschen Satzes (7,40) auf ein Oberflächenintegral zurückführen; dieses Oberflächenintegral verschwindet aber, weil wir $\delta g_{mn} = 0$ und $\delta\Gamma^a_{bc} = 0$ auf der Oberfläche gefordert hatten. Damit vereinfacht sich (9,47) zu

$$\delta W = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\,g^{mn}R - R^{mn} + \varkappa\,\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{M}{L}\right)}{\delta g_{mn}}\right)\delta g_{mn}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0. \tag{9,48}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variationen $\delta g_{mn}$ muß der Inhalt der runden Klammer identisch verschwinden, so daß wir aus unserem Variationsprinzip genau die Einsteinschen Gleichungen

$$R^{mn} - \tfrac{1}{2}\, g^{mn} R = \varkappa T^{mn} \tag{9,49}$$

erhalten, wenn wir den Energieimpulstensor mit der Variationsableitung entsprechend

$$T^{mn} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\, \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{M}}{L}\right)}{\delta g_{mn}} \tag{9,50}$$

identifizieren.

Womit kann man diese Gleichsetzung rechtfertigen? Zwei Standpunkte sind dazu möglich. Einmal kann man (9,50) als Definition des Energieimpulstensors ansehen, genauer gesagt, *des* Energieimpulstensors von den vielen möglichen Energieimpulstensoren einer klassischen Feldtheorie, der auf der rechten Seite der Einsteinschen Feldgleichungen stehen muß. In diesem Sinn ist (9,50) das Konstruktionsprinzip für den symmetrischen Energieimpulstensor, den zu finden in manchen Theorien recht kompliziert ist. Obwohl dieses Vorgehen das der Einsteinschen Theorie eigentlich gemäße ist, kann man (9,50) natürlich auch durch Vergleich mit dem als bekannt angesehenen Energieimpulstensor $T^{mn}$ bestätigen. Wir wollen dies am Beispiel des Maxwell-Feldes tun. Da dessen Lagrange-Funktion

$$\overset{\mathrm{M}}{L} = -\tfrac{1}{4}\, F_{ab} F^{ab} = -\tfrac{1}{4}\, (A_{b,a} - A_{a,b})\, (A_{s,r} - A_{r,s})\, g^{ar} g^{bs} \tag{9,51}$$

von Ableitungen der Metrik gar nicht abhängt, gilt wegen (9,45) und (9,41)

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{M}}{L}\right)}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{M}}{L}\right)}{\partial g_{mn}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{M}}{L} g^{mn} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, F^{nb} F^{m}{}_{b}, \tag{9,52}$$

und aus der Definition (9,50) folgt mit

$$T^{mn} = F^{nb} F^{m}{}_{b} - \tfrac{1}{4}\, g^{mn} F_{ab} F^{ab} \tag{9,53}$$

in der Tat der richtige Energieimpulstensor der Elektrodynamik.

Zum Schluß wollen wir noch auf eine besondere Eigenschaft der Wirkungsfunktion des Gravitationsfeldes aufmerksam machen. Obwohl die Lagrange-Funktion Ableitungen zweiter Ordnung enthält, entstehen daraus nicht — wie eigentlich zu erwarten wäre — als Feldgleichungen Differentialgleichungen vierter Ordnung. Dies liegt daran, daß der Krümmungsskalar $R$ die Ableitungen zweiter Ordnung genau in einer solchen Kombination enthält, daß aus ihnen eine vierdimensionale Divergenz gebildet werden kann,

$$R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g}\, (g^{ma} \Gamma^{n}_{ma} - g^{mn} \Gamma^{a}_{mn})\right]_{,n} + F(g_{mn}, \Gamma^{a}_{mn}), \tag{9,54}$$

die mittels des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umwandelbar ist und deswegen bei der Variation gar keinen Beitrag liefert. Dies ist auch der tiefere Grund dafür, daß ein Teil der Variation des Integranden als Divergenz auftrat [vgl. (9,43)].

Die nichtkovariante Aufspaltung (9,54) der Lagrange-Funktion des Gravitationsfeldes in eine Divergenz und einen Rest mit nur ersten Ableitungen spielt eine große Rolle bei den Versuchen, über die Lagrange-Funktion einen Energieimpulstensor (Energieimpulskomplex) des Gravitationsfeldes zu definieren.

*Literatur zu Kapitel 9.:*

[4], [5], [15], [36], [148], [169], [196], [204].

# 10. Die Schwarzschild-Lösung

## 10.1. Aufstellung der Feldgleichungen

Die für unser tägliches Leben wichtigsten Gravitationsfelder, nämlich das der Erde und das der Sonne, werden von langsam rotierenden, nahezu kugelförmigen Masseverteilungen erzeugt, sie sind näherungsweise kugelsymmetrisch. Da wir andererseits auch hoffen dürfen, daß kugelsymmetrische Gravitationsfelder besonders einfach sind, stellen wir uns als erste Anwendung der Einsteinschen Feldgleichungen die Aufgabe, exakte kugelsymmetrische Lösungen zu gewinnen.

*Das Linienelement.* Natürlich werden wir versuchen, dem Problem angepaßte Koordinaten einzuführen. Da eine Wahl der Koordinaten stets auf Forderungen an die metrischen Funktionen hinausläuft, muß man dabei vorsichtig vorgehen, um nicht durch zu starke Einschränkungen Lösungen zu verlieren. Kugelsymmetrie heißt offensichtlich, daß im dreidimensionalen Raum $T = \text{const}$ alle radialen Richtungen gleichwertig sind und keine dazu senkrechte Richtung ausgezeichnet ist; in Kugelkoordinaten $R$, $\vartheta$, $\varphi$ gilt:

$$\mathrm{d}^{(3)}s^2 = g_{11}(R, cT)\,\mathrm{d}R^2 + f(R, cT)\,[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2].$$

Die Winkelkoordinaten zu verschiedenen Zeiten können so gewählt werden, daß in der Metrik $g_{T\varphi}$ und $g_{T\vartheta}$ nicht vorkommen (sie würden tangentiale Richtungen auszeichnen). Unser Ansatz lautet also

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & g_{11}(R, cT)\,\mathrm{d}R^2 + f(R, cT)\,[\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2] \\ & + 2g_{14}(R, cT)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}cT + g_{44}(R, cT)\,c^2\,\mathrm{d}T^2. \end{aligned} \tag{10,1}$$

Es ist für viele Rechnungen zweckmäßig, $\mathrm{d}s^2$ noch weiter zu vereinfachen. Durch die Koordinatentransformation $r^2 = f(R, cT)$ ($f$ ist positiv, da es sonst zwei zeitartige Koordinaten $\vartheta$ und $\varphi$ geben würde) bringen wir das Linienelement auf die Form

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & h^2(r, T)\,\mathrm{d}r^2 - 2a(r, T)\,b(r, T)\,c\,\mathrm{d}T\,\mathrm{d}r - b^2(r, T)\,c^2\,\mathrm{d}T^2 \\ & + r^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2), \end{aligned}$$

die bereits das übliche zweidimensionale Linienelement enthält.

Dabei haben wir (in der Vorzeichenwahl) vorausgesetzt, daß $r$ eine raumartige und $T$ eine zeitartige Koordinate ist. Eine weitere Transformation $\mathrm{e}^{\nu/2}\,\mathrm{d}(ct) = b\,\mathrm{d}(cT) + a\,\mathrm{d}r$ ($\mathrm{e}^{\nu/2}$ spielt die Rolle eines integrierenden Faktors) beseitigt die störenden nicht-

orthogonalen Terme. Wir gelangen so zur Schwarzschildschen Form

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)}\,dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) - e^{\nu(r,t)}\,d(ct)^2 \tag{10,2}$$

des Linienelementes einer kugelsymmetrischen Metrik.

*Die Christoffel-Symbole.* Die zu einer Metrik gehörenden Christoffel-Symbole verschafft man sich am schnellsten, indem man die aus der Lagrange-Funktion, d. h. hier aus

$$L = \frac{1}{2}\left[e^{\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - e^{\nu}\left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2\right], \tag{10,3}$$

folgenden Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{10,4}$$

mit der Geodätengleichung

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = 0 \tag{10,5}$$

vergleicht und die Christoffel-Symbole abliest. Mit den Abkürzungen $^{\bullet} \equiv \partial/\partial ct$, $' \equiv \partial/\partial r$ lauten die Gln. (10,4) in unserem Fall

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda}\left[\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\lambda' + \frac{dr}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}\dot{\lambda}\right] - r\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - r\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2 e^{\nu}\nu' = 0, \\
&r^2\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2r\frac{dr}{d\tau}\frac{d\vartheta}{d\tau} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0, \\
&r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2r\sin^2\vartheta\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\vartheta}{d\tau} = 0, \\
&e^{\nu}\left[\frac{d^2x^4}{d\tau^2} + \frac{\dot{\nu}}{2}\left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2 + \nu'\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}\right] + \frac{1}{2}e^{\lambda}\dot{\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{10,6}$$

Von den insgesamt 40 unabhängigen Christoffel-Symbolen sind also nur die folgenden 12 von Null verschieden ($x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = ct$):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, && \Gamma^1_{14} = \frac{\dot{\lambda}}{2}, && \Gamma^1_{22} = -r\,e^{-\lambda}, \\
&\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta\,e^{-\lambda}, && \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu', && \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, && \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, && \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta, \\
&\Gamma^4_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}, && \Gamma^4_{14} = \frac{\nu'}{2}, && \Gamma^4_{44} = \frac{\dot{\nu}}{2}.
\end{aligned} \tag{10,7}$$

*Der Ricci-Tensor.* Aus der allgemeinen Definitionsgleichung

$$R^a{}_{mbn} = \Gamma^a_{mn,b} - \Gamma^a_{mb,n} + \Gamma^a_{rb}\Gamma^r_{mn} - \Gamma^a_{rn}\Gamma^r_{mb} \tag{10,8}$$

folgt unter Berücksichtigung von (10,7)

$$\begin{aligned}
R^1{}_{m1n} &= \Gamma^1_{mn,1} - \Gamma^1_{1m,n} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{mn} + \Gamma^1_{14}\Gamma^4_{mn} - \Gamma^1_{rn}\Gamma^r_{m1},\\
R^2{}_{m2n} &= \Gamma^2_{mn,2} - \Gamma^2_{2m,n} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{mn} - \Gamma^2_{rn}\Gamma^r_{m2},\\
R^3{}_{m3n} &= -\Gamma^3_{3m,n} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{mn} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{mn} - \Gamma^3_{rn}\Gamma^r_{m3},\\
R^4{}_{m4n} &= \Gamma^4_{mn,4} - \Gamma^4_{4m,n} + \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{mn} + \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{mn} - \Gamma^4_{rn}\Gamma^r_{m4}.
\end{aligned}$$

Alle diese Komponenten haben die Eigenschaft, nur für $m = n$ oder $(m, n) = (1, 4)$ nicht zu verschwinden. Auch $R_{1234}$ ist Null.

Dementsprechend sind nur die folgenden Komponenten des Ricci-Tensors von Null verschieden:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + e^{\lambda-\nu}\left[\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}\right],\\
R_{44} &= e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] + \frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\dot\lambda^2}{4} + \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4},\\
R_{14} &= \frac{\dot\lambda}{r},\\
R_{22} &= -e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right] + 1,\\
R_{33} &= -\sin^2\vartheta\, R_{22}.
\end{aligned} \tag{10,10}$$

*Die Vakuumfeldgleichungen.* Außerhalb der felderzeugenden Massen verschwindet der Energieimpulstensor, und da aus

$$R^{mn} - \tfrac{1}{2}\, g^{mn}R = 0$$

sofort durch Spurbildung $R = 0$ folgt, lauten die Feldgleichungen für das Vakuum einfach

$$R_{mn} = 0, \tag{10,11}$$

d. h., alle in (10,10) aufgeschriebenen Komponenten des Ricci-Tensors müssen verschwinden.

## 10.2. Die Lösung der Vakuumfeldgleichungen

*Der Birkhoffsche Satz.* Aus $R_{14} = 0$ folgt sofort $\dot\lambda = 0$; $\lambda$ hängt also nur von der radialen Koordinate $r$ ab. $R_{22} = 0$ ist demzufolge nur erfüllbar, wenn $\nu'$ ebenfalls von der Zeit unabhängig ist:

$$\nu = \nu(r) + f(t). \tag{10,12}$$

Da $\nu$ in das Linienelement nur in der Kombination $e^{\nu(r)}\, e^{f(t)}\, d(ct)^2$ eingeht, kann man

den Summanden $f(t)$ in (10,12) stets durch eine Koordinatentransformation

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{e}^{f/2}\,\mathrm{d}t \tag{10,13}$$

zum Verschwinden bringen, so daß in den neuen Koordinaten

$$\lambda = \lambda(r), \qquad \nu = \nu(r) \tag{10,14}$$

gilt, d. h. die Metrik von der Zeit nicht mehr abhängt. Wir haben damit den *Birkhoffschen Satz* bewiesen: *Jede kugelsymmetrische Vakuumlösung der Einsteinschen Gleichungen ist unabhängig von t (statisch)* (BIRKHOFF 1923). (Auch wenn entgegen unserer in Abschnitt 10.1. gemachten Voraussetzung $t$ keine zeitartige und $r$ keine raumartige Koordinate ist — dies ist in einem Schwarzen Loch der Fall; vgl. Abschnitt 22.3. — gilt der Satz, jedoch wird man die Lösung dann nicht statisch nennen.)

Denkt man sich das Vakuumgravitationsfeld von einem ebenfalls kugelsymmetrischen Stern erzeugt, dann ist dieses Feld immer statisch, auch bei einer kugelsymmetrischen radialen Bewegung (Explosion) der Massen im Innern des Sterns. Der Birkhoffsche Satz ist damit das Analogon der Aussage der Elektrodynamik, daß eine kugelsymmetrische Ladungs- und Stromverteilung nicht strahlt, es keine kugelsymmetrischen elektromagnetischen Wellen gibt.

*Die Schwarzschild-Lösung.* Für statische Vakuumfelder vereinfachen sich die Feldgleichungen (10,11) zu

$$\begin{gathered}\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0,\\ (\nu' + \lambda')\,\frac{1}{r} = 0,\\ \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 = 0.\end{gathered} \tag{10,15}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist gleichbedeutend mit

$$\lambda(r) = -\nu(r), \tag{10,16}$$

da die noch mögliche additive Konstante in (10,16) durch eine Koordinatentransformation (Zeittransformation) $dt' = \mathrm{const} \cdot \mathrm{d}t$ zum Verschwinden gebracht werden kann [Spezialfall von (10,13)].

Die dritte Gleichung geht bei der Substitution $\alpha = \mathrm{e}^{-\lambda}$ in die Differentialgleichung

$$\alpha' + \alpha/r = 1/r \tag{10,17}$$

über, deren allgemeine Lösung

$$\alpha = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\nu} = 1 - 2M/r \tag{10,18}$$

mit $2M$ als frei wählbarer Integrationskonstante ist. Die bereits 1916 von SCHWARZSCHILD gefundene kugelsymmetrische Vakuumlösung hat also das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2M/r} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2. \tag{10,19}$$

Man kann durch Einsetzen dieser Lösung bestätigen, daß auch die erste der Feldgleichungen (10,15) erfüllt ist und keine weiteren Bedingungen liefert. Die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten $M$ werden wir im folgenden Abschnitt diskutieren.

## 10.3. Allgemeine Diskussion der Schwarzschild-Lösung

Um die physikalischen Eigenschaften des Schwarzschildschen Linienelementes (10,19) zu verstehen, müssen wir uns zuerst über die physikalische Bedeutung des Integrationsparameters $M$ Klarheit verschaffen. Dies geschieht am besten durch Vergleich mit der Newtonschen Theorie: Für große Werte der Koordinate $r$ weicht (10,19) nur wenig von der Metrik eines flachen Raumes ab, und aus der für diesen Grenzfall gültigen Verknüpfung (9,20) von Newtonschem Gravitationspotential $U$ und Metrik folgt

$$U = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{44}) = -\frac{Mc^2}{r}. \qquad (10,20)$$

Wir haben also die Schwarzschild-Lösung als das Gravitationsfeld zu interpretieren, das im Äußeren einer kugelsymmetrischen Massenverteilung der (Newtonschen) Masse

$$m = \frac{Mc^2}{f} = \frac{8\pi M}{\varkappa c^2} > 0 \qquad (10,21)$$

vorhanden ist. Die (positive) Integrationskonstante $2M$ ist entsprechend (10,21) ein Maß für die Gesamtmasse; da sie die Dimension einer Länge hat, nennt man $r_G = 2M$ auch den *Schwarzschild-Radius* oder *Gravitationsradius* der Quelle. Für normale Sterne oder Planeten ist $r_G$ sehr klein im Verhältnis zum geometrischen Radius. Der Schwarzschild-Radius der Sonne z. B. hat den Wert $r_G = 2{,}96$ km, der der Erde $r_G = 8{,}8$ mm. Da die Schwarzschild-Metrik nur das Gravitationsfeld im Außenraum der Massenverteilung beschreibt (auf das Feld im Innenraum gehen wir erst in Kapitel 11. ein), der Schwarzschild-Radius aber meist weit im Innern liegt, werden wir vor erst immer $r \gg 2M$ voraussetzen. Wir verweisen aber auf Kapitel 22., wo wir die Schwarzschild-Metrik noch einmal genauer untersuchen werden.

Bei der Diskussion physikalischer Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik (10,19) muß man immer beachten, daß insbesondere $r$ und $t$ nur Koordinaten sind und keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben. Wir nennen deshalb $t$ die *Koordinatenzeit*, im Unterschied z. B. zur Eigenzeit $\tau$ eines im Gravitationsfeld ruhenden Beobachters; im Schwarzschild-Feld sind diese beiden Größen durch

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - 2M/r}\,\mathrm{d}t \qquad (10,22)$$

miteinander verknüpft.

Die radiale Koordinate $r$ ist so definiert, daß die Oberfläche einer Kugel $r = \text{const}$, $t = \text{const}$ den Wert $4\pi r^2$ hat. Der infinitesimale Abstand in radialer Richtung ($\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t = 0$) ist aber durch

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - 2M/r}} \qquad (10,23)$$

gegeben, er ist also stets größer als die Differenz der radialen Koordinate. Man kann sich die metrischen Verhältnisse in der Fläche $t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$ durch eine Rotationsfläche $F = F(r)$ veranschaulichen, die für $r \to \infty$ in eine Ebene übergeht und für kleine $r$ eine Ausbeulung hat (vgl. Abb. 10.1). Bei der Diskussion von Bewegungsabläufen ($t$ variabel) muß man aber beachten, daß auch $g_{44}$ ortabshängig ist.

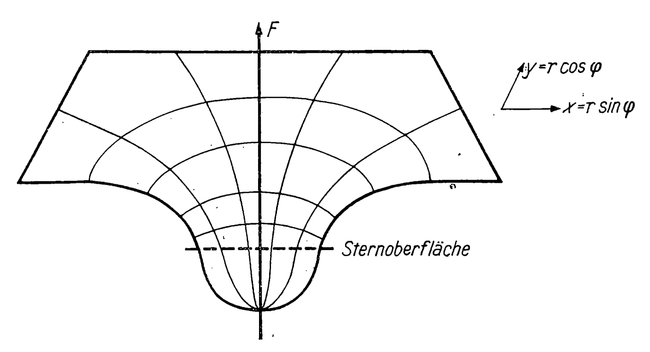



Abb. 10.1
Veranschaulichung des Ausschnitts t = const, $\vartheta = \pi/2$ der Schwarzschild-Metrik; $F = \sqrt{8M(r - 2M)}$

## 10.4. Planetenbewegung und Periheldrehung

Abbildung 10.1 vermittelt einen qualitativen Eindruck von den Planetenbahnen, wenn man sich die Planeten als Kugeln vorstellt, die unter dem Einfluß eines nach unten gerichteten Schwerefeldes auf der Fläche rollen. Nach der Newtonschen Gravitationstheorie sind die Planetenbahnen Ellipsen (der $x,y$-Ebene der Abb. 10.1). Ändert die Einsteinsche Theorie etwas an diesem doch so gut bestätigten Ergebnis?

Zur Beantwortung dieser Frage müßten wir eigentlich die schon in (10,6) aufgestellten Lagrange-Gleichungen II. Art integrieren. Da man jedoch immer durch geeignete Drehung des Koordinatensystems die Anfangsbedingungen $\vartheta = \pi/2$, $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\tau = 0$ erfüllen kann und wegen der zweiten der Gln. (10,6) dann auch $\mathrm{d}^2\vartheta/\mathrm{d}\tau^2$ verschwindet, bleibt die Bahnkurve ständig in der Fläche $\vartheta = \pi/2$: Wie in der Newtonschen Theorie verläuft eine Planetenbahn in einer „Ebene", die durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Wir können deshalb von der vereinfachten Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - 2M/r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] \tag{10,24}$$

ausgehen, die aus (10,3) durch Einsetzen der Schwarzschild-Metrik (10,19) und $\vartheta = \pi/2$ entsteht.

Da $\varphi$ und $x^4$ zyklische Koordinaten sind, gelten zwei Erhaltungssätze, nämlich der Drehimpulssatz

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = B \tag{10,25}$$

und der Energiesatz

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = A\,. \tag{10,26}$$

An Stelle einer dritten Bewegungsgleichung benutzen wir die Definitionsgleichung

$$\frac{1}{1-2M/r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=-c^2 \tag{10,27}$$

der Eigenzeit $\tau$, die wie Energie- und Impulssatz die Form eines ersten Integrals der Bewegungsgleichungen hat.

Das weitere Vorgehen ist analog dem in der Newtonschen Mechanik: Um die Bahnkurven $r = r(\varphi)$ zu erhalten, ersetzen wir mit Hilfe des Drehimpulses die Variable $\tau$ durch $\varphi$ und vereinfachen die Bewegungsgleichung durch die Substitution $u = r^{-1}$. Setzen wir

$$r=\frac{1}{u},\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=Bu^2,\quad \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau}=\frac{A}{1-2Mu},\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=-B\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \tag{10,28}$$

in die Gl. (10,27) ein, so folgt

$$B^2u'^2+B^2u^2(1-2Mu)-A^2=-c^2(1-2Mu),\qquad u'\equiv \mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi. \tag{10,29}$$

Die sofortige Integration dieser Gleichung ist zwar möglich, führt aber auf umständlich zu diskutierende elliptische Integrale. Wir differenzieren deshalb (10,29) und erhalten die leichter auswertbare Gleichung

$$u''+u=Mc^2/B^2+3Mu^2. \tag{10,30}$$

In der Newtonschen Theorie fehlt der Term $3Mu^2$; dort gilt

$$u_0''+u_0=Mc^2/B^2. \tag{10,31}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind bekanntlich die Kegelschnitte

$$u_0=\frac{Mc^2}{B^2}(1+\varepsilon\cos\varphi). \tag{10,32}$$

Wir werden eine für $M/r \ll 1$ gute Näherungslösung $u_1$ der exakten Bahngleichung (10,30) erhalten, wenn wir in das in $u$ quadratische Glied die Newtonsche Lösung (10.32) einsetzen, also mit

$$u_1''+u_1=\frac{Mc^2}{B^2}+3Mu_0^2=\frac{Mc^2}{B^2}+\frac{3M^3c^4}{B^4}(1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi) \tag{10,33}$$

rechnen. Diese Differentialgleichung ist vom Typ der Gleichung einer erzwungenen Schwingung. Wie man durch Einsetzen bestätigen kann, ist

$$u_1=u_0+\frac{3M^3c^4}{B^4}\left[1+\varepsilon\varphi\sin\varphi+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2\varphi\right)\right] \tag{10,34}$$

die gesuchte erste Näherung. Der wichtigste Term auf der rechten Seite ist der in $\varepsilon\varphi$ lineare Term, da er der einzige ist, der im Laufe der Zeit (bei vielen Umläufen des Planeten) immer größer wird. Wir vernachlässigen deshalb die anderen Korrekturterme zu $u_0$ und erhalten (nach Einsetzen von $u_0$)

$$u_1=\frac{Mc^2}{B^2}\left[1+\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon\frac{3M^2c^2}{B^2}\varphi\sin\varphi\right] \tag{10,35}$$

oder, da $r_0 = u_0^{-1}$ groß gegen $M$ ist ($M^2c^2/B^2 \ll 1$,

$$u_1 = \frac{1}{r} = \frac{Mc^2}{B^2}\left[1 + \varepsilon \cos\left(1 - \frac{3M^2c^2}{B^2}\right)\varphi\right]. \tag{10,36}$$

Die Planetenbahn ist also nur noch näherungsweise eine Ellipse (vgl. Abb. 10.2). Die Lösung (10,36) ist zwar noch eine periodische Funktion, jedoch nicht mehr mit der Periode $2\pi$: Der sonnennächste Punkt der Bahn wird erst nach Durchlaufen des zusätzlichen Winkels

$$\Delta\varphi_P = 6\pi M^2c^2/B^2 \tag{10,37}$$

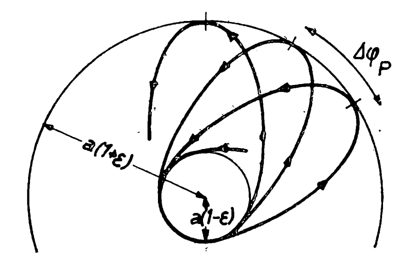



Abb. 10.2
Rosettenbewegung eines Planeten infolge Periheldrehung ($\Delta\varphi_P$ übertrieben groß)

wieder erreicht. Dieser Effekt ist die berühmte Periheldrehung. Drücken wir in (10,37) den Faktor $Mc^2/B^2$ unter Verwendung der Ellipsengleichung (10,32) durch die große Halbachse $a$ der Ellipse und durch $\varepsilon$ aus,

$$\Delta\varphi_P = 6\pi M/a(1 - \varepsilon^2), \tag{10,38}$$

dann sehen wir, daß die Periheldrehung für eine große Zentralmasse $M$ und langgestreckte ($\varepsilon \approx 1$) Ellipsen kleiner Achse $a$ (Bewegung nahe am Zentrum) am größten wird. Sie verschwindet für Kreisbahnen.

## 10.5. Lichtausbreitung im Schwarzschild-Feld

*Lichtstrahlen und Lichtablenkung.* Lichtstrahlen sind Nullgeodäten, d. h. Geodäten mit $ds^2 = 0$. Wir können die entsprechende Geodätengleichung ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt auswerten und deshalb einen Teil der dortigen Ergebnisse sofort übernehmen. Wir müssen nur statt der Eigenzeit $\tau$ den affinen Parameter $\lambda$ und statt (10,27) die Beziehung

$$\frac{1}{1 - 2M/r}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dct}{d\lambda}\right)^2 = 0. \tag{10,39}$$

verwenden [vgl. (3,9)]. Wir gelangen dann zu der Feststellung, daß bei geeigneter Koordinatenwahl die Lichtstrahlen in der Schwarzschild-Metrik in der Fläche $= \text{const} = \pi/2$ verlaufen und der zu (10,30) analogen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2, \qquad u \equiv 1/r \tag{10,40}$$

genügen.

Im flachen Raum ($M = 0$) sind die Lichtstrahlen natürlich Geraden. Bei unserer Koordinatenwahl werden diese Geraden durch

$$u_0 = \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \sin (\varphi - \varphi_0) \qquad (10{,}41)$$

dargestellt. Sie laufen in den Richtungen $\varphi = \varphi_0$ bzw. $\varphi = \varphi_0 + \pi$ ins Unendliche ($u = 0$) und haben vom Zentrum ($r = 0$) den Abstand $D$.

Um eine Näherungslösung $u_1$ der Gl. (10,40) zu erhalten, ersetzen wir das in $u$ quadratische Glied durch seinen Newtonschen Wert (10,41) und lösen

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{3M}{D^2} \sin^2 (\varphi - \varphi_0). \qquad (10{,}42)$$

Wie man durch Einsetzen bestätigen kann, ist bei geeigneter Wahl von $\varphi_0$

$$u_1 = \frac{1}{r} = \pm \frac{\sin \varphi}{D} + \frac{M(1 + \cos \varphi)^2}{D^2} \qquad (10{,}43)$$

eine Lösungsschar. Es handelt sich dabei um Kurven, die parallel aus dem Unendlichen (aus der Richtung $\varphi = \pi$) kommen. Das Vorzeichen in (10,43) ist dabei in Abhängigkeit vom Winkel $\varphi$ stets so zu wählen, daß $u_1 = 1/r$ positiv ist. Da eine Kurve das Feld in der Richtung wieder verläßt, in der $u_1$ Null ($r$ unendlich) wird, ist ihre Gesamtablenkung gegenüber einer Geraden (bei Vernachlässigung von in $M$ quadratischen Termen)

$$\Delta\varphi = \frac{4M}{D} \qquad (10{,}44)$$

(vgl. Abb. 10.3).

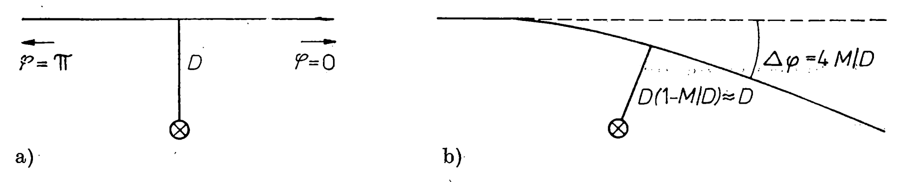



Abb. 10.3
Lichtablenkung in der Schwarzschild-Metrik
a) flacher Raum, $u = u_0$ b) Schwarzschild-Metrik, $u = u_1$

Dieser Effekt ist die bekannte Lichtablenkung im Gravitationsfeld, eine der wichtigsten Vorhersagen der Einsteinschen Theorie. Die Ablenkung ist umgekehrt proportional zum (Newtonschen) Abstand vom Zentrum; da im Sonnensystem stets $M/D \ll 1$ gilt (dies wurde auch bei der Ableitung vorausgesetzt), handelt es sich um einen sehr kleinen Effekt. In sehr starken Gravitationsfeldern ist (10,44) nicht mehr anwendbar (vgl. Kapitel 22.).

Die gesamte Kurvenschar (10,43) kann man offenbar als die Gesamtheit der Lichtstrahlen interpretieren, die von einer sehr weit entfernten punktförmigen Quelle

ausgehen. Betrachtet man ihr Bild (Abb. 10.4), sieht man, daß sie konvergieren: Ein (kugelsymmetrisches) Gravitationsfeld wirkt wie eine Linse. Im Vergleich zu einer guten optischen Linse hat eine solche Gravitationslinse allerdings zwei (miteinander zusammenhängende) Besonderheiten: Sie erzeugt Doppelbilder, und parallel einfallende Strahlen werden nicht in einem Brenn*punkt*, sondern in einer *Linie* (Fokallinie) vereinigt.

Entsprechend den beiden durch den Punkt $P$ gehenden Strahlen sieht ein Beobachter dort zwei Bilder der Quelle (mit im allgemeinen unterschiedlicher Intensität); die Details dieses Doppelbildes hängen stark von möglichen Interferenzeffekten (von den Kohärenzeigenschaften des Lichtes) ab.

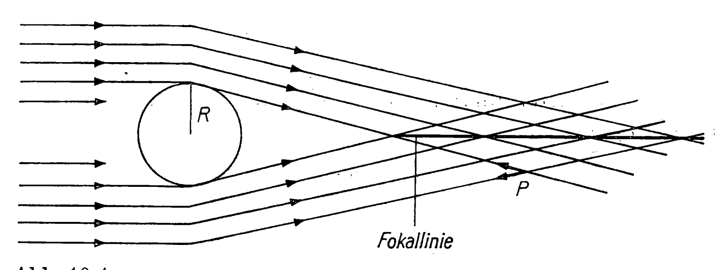



Abb. 10.4
Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld als Gravitationslinse
($R$ Radius der felderzeugenden Masse)

Auf und in der Nähe der Fokallinie versagt die geometrische Optik, die Überlagerung der in jedem Punkt ankommenden unendlich vielen Strahlen kann korrekt nur wellenoptisch behandelt werden. Das Ergebnis ist nicht ein Bild in Form eines Kreisringes, wie es die geometrische Optik liefern würde, sondern ein Lichtpunkt starker Intensität. Für Licht der Wellenlänge $\lambda$ ist längs der gesamten Fokallinie die Intensität um den Faktor $4\pi M/\lambda$ verstärkt, für sichtbares Licht und eine Sonnenmasse also etwa um den Faktor $3 \cdot 10^{10}$.

Bei der Interpretation der Abbildungen 10.3b und 10.4 muß man beachten, daß in ihnen der $r,\varphi$-Ausschnitt der Schwarzschild-Metrik auf eine flache $r,\varphi$-Ebene gewissermaßen symbolisch abgebildet wurde. Sie geben nur für sehr große $r$-Werte die wahren Abstände richtig wieder.

*Rotverschiebung.* Bei der Ausbreitung des Lichtes in einem Gravitationsfeld ändert sich nicht nur die Richtung der Lichtstrahlen, sondern auch die Frequenz des Lichtes. Da sich die entsprechenden Formeln ohne größeren Aufwand gleich für beliebige statistische Felder ableiten lassen, werden wir diese Verallgemeinerung durchführen und erst im Endergebnis wieder den Spezialfall der Schwarzschild-Metrik einsetzen. Eine noch allgemeinere, für beliebige Gravitationsfelder gültige Beziehung werden wir in Abschnitt 25.2. kennenlernen.

In einem statischen Gravitationsfeld, d. h. in einer Metrik $g_{nm}$, die zeitunabhängig ist und die Bedingungen $g_{4\alpha} = 0$ erfüllt, lassen sich die Maxwell-Gleichungen (8,49) bezüglich der Zeit $t$ durch den Ansatz

$$A_\mu(x^n) = a_\mu(x^\alpha)\, e^{i\omega t} \tag{10,45}$$

in der Eichung

$$A_4 = 0, \qquad [\sqrt{-g}\, g^{44} A^\beta]_{,\beta} = 0 \tag{10,46}$$

separieren und auf die zeitfreie Wellengleichung

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\beta}]_{,\nu} + \frac{\omega^2}{c^2} g^{44} a^\mu = 0 \tag{10,47}$$

zurückführen.

Ein Beobachter, der am Ort $P_1$ des Senders ruht, wird zur Messung der Frequenz $\nu_1$ der Welle natürlich nicht die Koordinatenzeit $t$, sondern seine Eigenzeit $\tau_1$ benutzen. Wegen des allgemeinen Zusammenhangs

$$\tau_P = \sqrt{-g_{44}(P)}\, t \tag{10,48}$$

zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit wird er der monochromatischen Welle (10,45) also die Frequenz

$$\nu_1 = \frac{\omega t}{2\pi\tau_1} = \frac{\omega}{2\pi\sqrt{-g_{44}(1)}} = \frac{\omega\sqrt{-g^{44}(1)}}{2\pi} \tag{10,49}$$

zuordnen, in Übereinstimmung mit der Deutung des Faktors $-g^{44}\omega^2/c^2$ in (10,47) als Quadrat einer ortsabhängigen Wellenzahl. Ein am Ort $P_2$ ruhender Empfänger beobachtet analog in seinem lokalen Minkowski-System die Frequenz

$$\nu_2 = \frac{\omega}{2\pi\sqrt{-g_{44}(2)}}. \tag{10,50}$$

Die von ruhenden Beobachtern in den Punkten $P_1$ und $P_2$ gemessenen Frequenzen $\nu_1$ und $\nu_2$ verhalten sich also wie

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{44}(2)}{g_{44}(1)}} = 1 + z. \tag{10,51}$$

Obwohl $\nu_2$ sowohl größer als auch kleiner als $\nu_1$ sein kann, spricht man allgemein vom Effekt der Rotverschiebung im Gravitationsfeld und nennt die durch (10,51) definierte Größe $z$ die *Rotverschiebung* am Ort $P_2$.

Für die Schwarzschild-Metrik folgt aus (10,51) die Beziehung

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{1 - 2M/r_2}{1 - 2M/r_1}} \approx 1 + M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{10,52}$$

Licht, das von der Sonne ($P_1$) zur Erde ($P_2$) gelangt ($r_1 < r_2$), wird zum roten Wellenlängenbereich hin verschoben.

Drücken wir entsprechend (9,20) $g_{44}$ durch das Newtonsche Gravitationspotential $U$ aus, erhalten wir in erster Näherung

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1 + \frac{U_2 - U_1}{c^2}. \tag{10,53}$$

Im Teilchen- (Photonen-) Bild des Lichtes entspricht die Gravitationsrotverschiebung einer Änderung der kinetischen Energie $E = h\nu$ durch Gewinn oder Verlust von potentieller Energie $m\Delta U = \Delta U \cdot E/c^2$, in Übereinstimmung mit Formel (10,53).

*Lichtlaufzeiten und Fermatsches Prinzip.* Auch hier verallgemeinern wir wieder die Aufgabenstellung und lassen beliebige statische Gravitationsfelder ($g_{ab,4} = 0$, $g_{\alpha 4} = 0$) zu. In allen diesen Feldern läßt sich nämlich die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^a}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^a_{mn} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{10,54}$$

einer Nullgeodäten in eine Gestalt bringen, die eine besonders einfache physikalische Interpretation gestattet. Wir führen dazu anstelle des Parameters $\lambda$ die Koordinatenzeit $t$ ein und setzen für die Christoffel-Symbole die expliziten Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}),\\
&\Gamma^\alpha_{4\nu} = 0, \qquad \Gamma^4_{\mu\nu} = 0, \qquad \Gamma^4_{\alpha 4} = \frac{1}{2}\, g^{44} g_{44,\alpha} = \frac{g_{44,\alpha}}{2 g_{44}},\\
&\Gamma^\alpha_{44} = -\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} g_{44,\beta}, \qquad \Gamma^4_{44} = 0
\end{aligned} \tag{10,55}$$

ein. Die vierte der Gleichungen (10,54),

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{g_{44,\alpha}}{g_{44}} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = 0, \tag{10,56}$$

ermöglicht es uns, aus den drei räumlichen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\alpha_{44} c^2 + \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10,57}$$

$\lambda$ zu eliminieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + g^{\alpha\beta}\, \frac{1}{2}\, (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\nu\mu,\beta}) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} - \frac{c^2}{2}\, g^{\alpha\beta} g_{44,\beta}\\
&\qquad - \frac{g_{44,\nu}}{g_{44}} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = 0.
\end{aligned} \tag{10,58}$$

Beachten wir die Nullgeodäteneigenschaft $\mathrm{d}s = 0$, d. h.

$$c^2\, \mathrm{d}t^2 = \frac{g_{\alpha\beta}}{-g_{44}}\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta \equiv \gamma_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta \equiv \frac{\mathrm{d}l^2}{-g_{44}}, \tag{10,59}$$

dann läßt sich (10,58) zu

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0,\\
&\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \gamma^{\alpha\beta}(\gamma_{\beta\mu,\nu} + \gamma_{\beta\nu,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\beta}), \qquad \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\nu} = \delta^\alpha_\nu
\end{aligned} \tag{10,60}$$

zusammenfassen. Die durch diese Gleichungen beschriebenen Kurven sind aber genau

die Extremalen, die aus dem Variationsprinzip

$$\int \mathrm{d}t = \frac{1}{c} \int \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c} \int \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{-g_{44}}} = \text{Extr.} \tag{10,61}$$

folgen (vgl. Abschnitt 1.3.).

Das Variationsprinzip (10,61) ist die Verallgemeinerung des Fermatschen Prinzips: Licht breitet sich in einem dreidimensionalen Raum so aus, daß die Lichtlaufzeit $t$ ein Extremum wird.

Das Variationsprinzip (10,61) läßt sich auch so lesen, daß der dreidimensionale Raum (Metrik $g_{\alpha\beta}$) einen Brechungsindex $n = (-g_{44})^{-1/2}$ hat, der durch die Schwerkraft hervorgerufen wird (und der auch die Lichtablenkung mit bewirkt), und daß die Lichtgeschwindigkeit $v$ im Gravitationsfeld entsprechend $c = nv$ vermindert ist. Gerade diese letzte Interpretation ist aber nur mit Vorbehalt zu verwenden: $v$ ist die Lichtgeschwindigkeit bezüglich der Koordinatenzeit $t$ und hat deshalb, wie $t$ selbst, keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Aussagen über Zahlenwerte der Lichtgeschwindigkeit haben in der Allgemeinen Relativitätstheorie nur noch geringen Wert; wesentlich ist nur, daß sich Licht längs Nullgeodäten fortpflanzt (und daß man in lokalen Inertialsystemen durch Wahl der Zeiteinheit der Lichtgeschwindigkeit den Wert $c$ geben kann).

## 10.6. Ergänzungen zur Schwarzschild-Metrik

*Isotrope Koordinaten.* Die Schwarzschild-Koordinaten, in denen wir bisher das kugelsymmetrische Gravitationsfeld beschrieben haben, gehen in großer Entfernung vom Zentrum (für $r \to \infty$) in Kugelkoordinaten über. Für manche Rechnungen oder Überlegungen sind Koordinaten vorteilhafter, die den kartesischen Koordinaten verwandt sind. Wir führen sie durch die Transformation

$$r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2, \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \cos\varphi \sin\vartheta, \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin\varphi \sin\vartheta, \\ \bar{z} &= \bar{r} \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{10,62}$$

ein, die aus (10,19)

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + M/2\bar{r})^4 (\mathrm{d}\bar{x}^2 + \mathrm{d}\bar{y}^2 + \mathrm{d}\bar{z}^2) - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2 c^2\, \mathrm{d}t^2 \tag{10,63}$$

macht. Da in diese Form des Linienelementes die drei räumlichen Richtungen lokal gleichberechtigt eingehen, spricht man von isotropen Koordinaten.

*Harmonische Koordinaten.* Koordinaten, die durch

$$\Box\, x^a \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g}\, g^{nm} x^a{}_{,m}\right]_{,n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, g^{an}\right)_{,n} = 0 \tag{10,64}$$

eingeschränkt werden, heißen harmonische Koordinaten (natürlich ist (10,64) keine kovariante Gleichung, sie dient ja gerade zur Auszeichnung eines Koordinatensystems). Solche Koordinaten sind bei Näherungsverfahren zur Lösung der Einstein-

Gleichungen nützlich (vgl. Abschnitt 13.2.). Die Schwarzschild-Metrik hat in ihnen die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = \left[\left(1 + \frac{M}{\bar{r}}\right)^2 \eta_{\alpha\beta} + \left(\frac{\bar{r} + M}{\bar{r} - M}\right) \frac{M^2}{\bar{r}^4}\, x_\alpha x_\beta\right] \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta - \left(\frac{\bar{r} - M}{\bar{r} + M}\right) c^2\, \mathrm{d}t, \tag{10,65}$$

$$\bar{r} = r - M. \tag{10,66}$$

*Das Innenfeld einer Hohlkugel.* Das Schwarzschildsche Linienelement (10,19) folgte allein aus der Forderung der Kugelsymmetrie, es gilt also auch im materiefreien Innern einer Hohlkugel. In diesem Fall muß die Metrik aber bei $r = 0$ endlich sein, d. h., $M$ muß verschwinden: Der Raum im Innern einer Hohlkugel ist feldfrei (flach), wie in der Newtonschen Gravitationstheorie.

## 10.7. Experimente zur Bestätigung der Schwarzschild-Metrik

Die Schwerefelder der Erde und der Sonne bilden unsere natürliche Umwelt, und die Gesetze der Schwerkraft sind an diesen Feldern untersucht und in Gleichungen gefaßt worden. Beide Felder sind in guter Näherung kugelsymmetrisch und daher geeignete Testobjekte zur Prüfung der Einsteinschen Theorie bzw. der Schwarzschild-Metrik.

Die Einsteinsche Theorie enthält die Newtonsche Gravitationstheorie als erste Näherung, und sie wird in diesem Sinn natürlich auch durch die Keplerschen Gesetze bestätigt. Uns interessieren hier aber hauptsächlich die — meist sehr geringen — Korrekturen an den Aussagen der Newtonschen Theorie. Bei sehr genauen Experimenten muß man sorgfältig zwischen folgenden drei Ursachen für Abweichungen vom Newtonschen kugelsymmetrischen Feld unterscheiden:

1. Relativistische Korrekturen am kugelsymmetrischen Feld,
2. Newtonsche Korrekturen, hervorgerufen durch Abweichungen von der Kugelsymmetrie (Abplattung von Erde oder Sonne, Berücksichtigung der Schwerefelder anderer Planeten),
3. Relativistische Korrekturen durch Abweichungen von Kugelsymmetrie und Statik.

Während man die relativistischen Korrekturen der Kategorie 3 fast immer vernachlässigen kann, sind die Newtonschen Korrekturen 2 oft größer als die uns eigentlich interessierenden relativistischen Effekte 1 und nur schwer von diesen zu trennen.

Die Diskussion von Messungen und Experimenten im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld führt man häufig so durch, daß man von einer allgemeineren als der Schwarzschild-Metrik ausgeht, z. B. in isotropen Koordinaten unter Vernachlässigung höherer Terme von

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \gamma \frac{2M}{\bar{r}} + \dots\right) (\mathrm{d}\bar{x}^2 + \mathrm{d}\bar{y}^2 + \mathrm{d}\bar{z}^2) - \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}} + \beta \frac{2M^2}{\bar{r}^2} + \dots\right) c^2\, \mathrm{d}t^2. \tag{10,67}$$

Die freien Parameter $\beta$ und $\iota$ (zwei der sogenannten PPN-Parameter; vgl. Abschnitt 29.2.) werden dann den Beobachtungsdaten optimal angepaßt. Da beide Parameter

in der Schwarzschild-Metrik (10,63) den Wert 1 haben, sind $\beta - 1$ und $\gamma - 1$ ein Maß für die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Einsteinscher Theorie. Periheldrehung $\Delta\varphi_P$, Lichtablenkung $\Delta\varphi$ und Lichtlaufzeit $\Delta t$ haben in der Metrik (10,67) die gegenüber den Einsteinschen (Index E) geänderten Werte

$$\Delta\varphi_P = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta)\,\Delta\varphi_{PE}, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{2}(1 + \gamma)\,\Delta\varphi_E,$$
$$\Delta t = \frac{1}{2}(1 + \gamma)\,\Delta t_E. \tag{10,68}$$

*Periheldrehung und Planetenbahnen.* Die Einsteinsche Theorie sagt entsprechend Gl. (10,38) die folgenden Werte der Periheldrehung (pro Jahrhundert) voraus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Merkur | 42,98″ | Erde | 3,8″ |
| Venus | 8,6″ | Erdsatellit | $\leq 1000''$ |
| Mars | 1,35″ | | |

(10,69)

Da die Abweichungen des Schwerefeldes der Erde von der Kugelsymmetrie so groß ist, daß man aus den durch sie hervorgerufenen Unregelmäßigkeiten der Satellitenbahnen die Massenverteilung der Erde bestimmen kann, sind Erdsatelliten zur Zeit keine geeigneten Testobjekte.

Am aussichtsreichsten war in den ersten Jahrzehnten der Relativitätstheorie die Auswertung der Bahndaten des Merkur. Es war den Astronomen schon vor Einstein aufgefallen, daß von der beobachteten Periheldrehung von 5600″ pro Jahrhundert zwar der größte Teil auf Störungen durch andere Planeten zurückgeführt werden konnte, aber ein nicht erklärbarer Rest von 41″ blieb — in guter Übereinstimmung mit der Einsteinschen Theorie.

Wesentlich genauere Daten gaben die Ausmessung der Marsbahn durch die Viking-Mission (1976—82) und die Radar-Entfernungsmessungen von Venus und Merkur. Viele Meßdaten und eine umfangreiche Computeranalyse (bei der z. B. auch die Einflüsse der großen Asteroiden auf die Marsbahn berücksichtigt werden mußten) führten zu den Werten

$$\beta - 1 = (3 \pm 3{,}1)\,10^{-3}, \qquad \gamma - 1 = (0{,}7 \pm 1{,}7)\,10^{-3}. \tag{10,70}$$

Bei der Auswertung bildete das unbekannte Quadrupolmoment der Sonne die Hauptfehlerquelle; die an Mars und Merkur unabhängig durchgeführten Messungen sprechen aber dafür, daß es vernachlässigt werden kann.

Im Jahre 1974 wurde ein Pulsar entdeckt (PSR 1913 + 16), der mit einem anderen (kleineren) Stern unbekannter Natur (Weißer Zwerg, Neutronenstern oder Schwarzes Loch) ein Doppelsternsystem bildet. Die Bahnellipse des Pulsars zeigt eine ungewöhnlich große Drehung der Achse (Periastrondrehung) von $(4{,}22 \pm 0{,}04)^\circ$ pro Jahr, also das 271-fache des Gesamtwertes beim Merkur. Mit großer Wahrscheinlichkeit ist der Effekt rein relativistischer Natur.

*Lichtablenkung an der Sonne.* Der maximale Wert der Lichtablenkung wird erreicht, wenn der Lichtstrahl den Sonnenrand streift (vgl. Abb. 10.5); er beträgt dann

$$\Delta\varphi = 1{,}75''. \tag{10,71}$$

Um diesen Effekt zu messen, vergleicht man die Nachtaufnahme eines Himmelsgebietes mit der Aufnahme desselben Gebietes während einer Sonnenfinsternis

(da sonst die Sonne das Bild der Sterne überstrahlen würde). Durch den Einfluß der Sonne müßten die Sterne in Sonnennähe nach außen hin verschoben erscheinen. Obwohl wegen der experimentellen Schwierigkeiten (hervorgerufen z. B. durch Verzerrungen der Schicht beim Entwickeln der Photoplatte) die Meßwerte zwischen 1,43″ und 2,7″ schwankten, begründete gerade dieser Effekt und seine Bestätigung durch EDDINGTON im Jahr 1919 Einsteins Ruhm in der breiteren Öffentlichkeit.

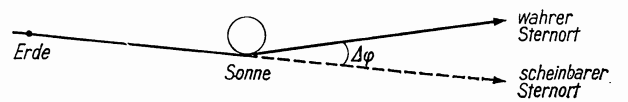



Abb. 10.5
Zur Lichtablenkung an der Sonne

Eine andere Möglichkeit bietet die Bedeckung von starken Radioquellen (Quasaren) durch die Sonne infolge der Bewegung der Erde um die Sonne. Durch genügend große Interferometeranordnungen und Messungen bei verschiedenen Frequenzen, um den Einfluß des Sonnenplasmas auf die Ablenkung eliminieren zu können, wurde eine wesentlich größere Genauigkeit als im optischen Bereich möglich. Die bisherigen Messungen (Fomalont und Sramek 1976) bestätigten den Einsteinschen Wert von $\gamma$ bis auf 1%:

$$\gamma - 1 = 0{,}007 \pm 0{,}009. \qquad (10{,}72)$$

*Gravitationslinsen und Brennlinie.* Obwohl schon die Lichtablenkung die Linsenwirkung eines Gravitationsfeldes nachweist, spricht man von Gravitationslinsen erst dann, wenn man sich im Bereich der einander überschneidenden Strahlen befindet und z. B. Doppelbilder sieht (vgl. Abb. 10.4). Im Gravitationsfeld der Sonne beginnt dieser Bereich erst in einer Entfernung $d = R_\odot/\Delta\varphi = R^2/4M \approx 8.2 \cdot 10^{10}$ km von der Sonne, also praktisch erst außerhalb des Planetensystems: Wenn wir auf der Erde Doppelbilder eines Sterns sehen, ist nicht die Sonne, sondern ein entfernter Stern oder eine Galaxis Zentrum der Gravitationslinse.

Im Jahre 1979 wurde ein Doppelquasar gefunden, dessen zwei Zentren so nahe beeinander stehen (6″) und ein so ähnliches spektrales Verhalten zeigen, daß es sich vermutlich um das Bild nur *eines* Quasars handelt. Die Rolle der Gravitationslinse spielt dabei eine Galaxis.

Die Intensitätssteigerung auf der Brennlinie einer Gravitationslinse wurde noch nicht beobachtet.

*Rotverschiebung.* Die Rotverschiebung (10,53) im Schwerefeld der Erde konnte erstmalig von POUND und REBKA (1960) mit Hilfe des Mößbauer-Effektes gemessen werden. Die Quelle ($^{57}$Fe) wurde dabei im Keller eines Hochhauses so bewegt, daß die dadurch hervorgerufene Doppler-Verschiebung genau dem Energieverlust der Photonen bis zum Erreichen des Empfängers in 22,5 m Höhe entsprach; die Beziehung

$$\Delta\lambda/\lambda = gh \qquad (10{,}73)$$

wurde dabei mit 1% Genauigkeit bestätigt.

Wesentlich genauer ($7 \cdot 10^{-5}$) konnte die Rotverschiebung durch ein Experiment bestätigt werden, bei dem ein Wasserstoff-Maser von einer Rakete in eine Höhe von 10000 km gebracht wurde (Vessot 1980).

Man kann diese Ergebnisse auch als Beweis dafür ansehen, daß Atom- bzw. Moleküluhren die Eigenzeit und nicht die Koordinatenzeit anzeigen.

*Laufzeitmessungen von Radarsignalen.* Die Laufzeit eines Radarsignals, das von einem Planeten (Merkur, Venus) reflektiert oder von einem Satelliten ausgesandt wird, kann durch Vergleich mit der relativistischen Beziehung

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int \sqrt{\frac{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}{-g_{44}}} \tag{10,74}$$

ebenfalls zur Verifizierung der Einsteinschen Theorie benutzt werden (dieser sogenannte vierte Test der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde erst 1964 von SHAPIRO vorgeschlagen). Insbesondere die Viking-Mission zum Mars lieferte Daten, die zum Wert

$$\gamma - 1 = 0 \pm 0{,}002 \tag{10,75}$$

führten.

*Präzession eines Kreisels in einem Satelliten.* Der Spinvektor $S^a$ eines Kreisels, der in einem Satelliten auf einer Geodäten transportiert wird, genügt wegen (9,31) bis (9,36) den Gleichungen

$$\frac{DS^a}{D\tau} = 0, \qquad S^a S_a = \text{const}, \qquad S^a u_a = 0. \tag{10,76}$$

Da die im Satelliten benutzten, nach den Fixsternen ausgerichteten Einheitsvektoren $h^a{}_{(\nu)}$ bei der Bewegung nicht parallel transportiert werden, ändern sich die Komponenten $S_{(\nu)} = S_a h^a{}_{(\nu)}$ des Spinvektors im Ruhesystem des Satelliten:

$$\frac{dS_{(\nu)}}{d\tau} = \frac{DS_{(\nu)}}{D\tau} = S_a \frac{Dh^a{}_{(\nu)}}{D\tau}. \tag{10,77}$$

Die Komponenten der Tetradenvektoren in isotropen Schwarzschild-Koordinaten erhält man aus den im Ruhesystem des Satelliten benutzten drei orthogonalen Einheitsvektoren, indem man eine Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $-v^\alpha = -u^\alpha\, d\tau/dt$ und eine Maßstabsveränderung

$$\begin{aligned} dx^{\alpha'} &= (1 + M/2\bar{r})^2\, dx^\alpha \approx (1 - U/c^2)\, dx^\alpha, \\ dt' &= \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right) dt \approx (1 + U/c^2)\, dt \end{aligned} \tag{10,78}$$

durchführt. Unter Beschränkung auf Terme erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} h^\alpha{}_{(\nu)} &= (1 + U/c^2)\, \delta^\alpha_\nu + v^\alpha v_\nu/2c^2, \\ h^4{}_{(\nu)} &= v_\nu, \qquad S_{(\alpha)} = S_\alpha. \end{aligned} \tag{10,79}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (10,77) und Berücksichtigung von

$$\frac{dv_\alpha}{d\tau} \approx -U_{,\alpha} \tag{10,80}$$

liefert schließlich

$$\begin{aligned} \frac{dS_{(\nu)}}{d\tau} &\approx S_{(\alpha)} \frac{3}{2c^2} [U_{,\alpha} v_{(\nu)} - U_{,\nu} v_{(\alpha)}], \\ U_{,\nu} &\approx U_{(\nu)}, \qquad v_\alpha = v_{(\alpha)}, \end{aligned} \tag{10,81}$$

d. h., der Spinvektor rotiert im System des Satelliten mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{\omega} = -\frac{3}{2c^2}\,\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U. \tag{10,82}$$

Für einen Satelliten der Erde beträgt die Winkelgeschwindigkeit etwa 8″ pro Jahr; Experimente wurden bisher noch nicht durchgeführt.

*Literatur zu Kapitel 10.:*

[17], [82], [113], [120], [146], [147], [175], [177], [178], [179], [180], [190], [193], [207], [209].

# 11. Die innere Schwarzschild-Lösung

## 11.1. Die Feldgleichungen

Wenn wir das Gravitationsfeld im Innern eines Himmelskörpers bestimmen wollen, brauchen wir dazu ein Modell dieses Körpers, d. h., wir müssen Aussagen über seinen Energieimpulstensor machen. Bei Vernachlässigung von typisch thermodynamischen Effekten, wie Wärmeleitung und innerer Reibung, ist das ideale fluide Medium (8,84)

$$T_{mn} = (\mu + p/c^2)\, u_m u_n + p g_{mn} \tag{11,1}$$

eine brauchbare Näherung.

Wir suchen eine kugelsymmetrische statische Lösung (Vernachlässigung radialer Massenströme in den Sternen), fordern also, daß das allgemeine Linienelement (10,2) zeitunabhängig ist, d. h.

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\lambda(r)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - \mathrm{e}^{\nu(r)}c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{11,2}$$

gilt, die Materie in diesem Koordinatensystem ruht,

$$u^m = (0, 0, 0, c\,\mathrm{e}^{-\nu/2}), \tag{11,3}$$

und $\mu$ und $p$ reine Funktionen des Radius $r$ sind.

Bei der Aufstellung der Feldgleichungen können wir die in (10,10) schon berechneten Komponenten des Ricci-Tensors benutzen:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r},\\
R_{44} &= \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right],\\
R_{22} &= -\mathrm{e}^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}\,\nu' - \lambda')\right] + 1 = \frac{R_{33}}{\sin^2\vartheta},\\
R &= R^n_n = -2\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \frac{2}{r^2}.
\end{aligned} \tag{11,4}$$

Die Einsteinschen Gleichungen

$$R_m^n - \tfrac{1}{2} R g_m^n = \varkappa T_m^n \tag{11,5}$$

nehmen damit die Gestalt

$$\varkappa p = R_1^1 - \frac{R}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2}, \tag{11,6a}$$

$$\varkappa p = R_2^2 - \frac{R}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right], \tag{11,6b}$$

$$-\varkappa\mu c^2 = R_4^4 - \frac{R}{2} = -\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2} \tag{11,6c}$$

an. Aus diesen drei Gleichungen und einer später noch zu formulierenden Zustandsgleichung $f(\mu, p) = 0$ sind die vier Funktionen $\lambda$, $\nu$, $p$ und $\mu$ zu bestimmen.

## 11.2. Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen

Wie wir im Abschnitt 9.1. ausführlich dargestellt haben, sind die Feldgleichungen (11,6) nur dann integrabel, wenn die Energie- und Impulsbilanzgleichungen $T^{mn}{}_{;n} = 0$ erfüllt sind. Diese Erhaltungssätze geben oft — analog den ersten Integralen der klassischen Mechanik — einen wichtigen Hinweis zur Lösung der Feldgleichungen. Da für statische Massen- und Druckverteilungen

$$\mu_{,n} u^n = 0, \qquad p_{,n} u^n = 0, \qquad u^n{}_{;n} = 0 \tag{11,7}$$

folgt, vereinfacht sich

$$T^{mn}{}_{;n} = [p g^{mn} + (\mu + p/c^2)\, u^m u^n]_{;n} = 0 \tag{11,8}$$

zu der einen Gleichung

$$p' + (\mu + p/c^2) u_{1;4} u^4 = p' - (\mu + p/c^2)\, \Gamma_{14}^4 u_4 u^4 = 0,$$

die auf

$$p' = -\frac{\nu'}{2}\,(p + \mu c^2) \tag{11,9}$$

führt. Diese Gleichung ist eine Folge der Feldgleichungen (11,6) und kann anstelle einer dieser drei Gleichungen benutzt werden.

Da man die Feldgleichung (11,6c) in der Form

$$\varkappa\mu c^2 r^2 = -(\mathrm{e}^{-\lambda} r)' + 1$$

schreiben kann, läßt sie sich leicht durch

$$r\,\mathrm{e}^{-\lambda} = r - 2m(r) + C \tag{11,10}$$

integrieren. Die Funktion $m(r)$, definiert durch

$$m(r) = \frac{\varkappa c^2}{2} \int_0^r \mu(x)\, x^2\, \mathrm{d}x, \tag{11,11}$$

nennen wir die *Massenfunktion*. Man kann (11,11) so lesen, daß $m(r)$ proportional zur in der Kugel vom Radius $r$ enthaltenen Gesamtmasse ist, muß bei dieser anschaulichen Interpretation aber beachten, daß $r$ nur der Koordinatenradius ist, der wahre Kugelradius $R(r)$ aber durch

$$R(r) = \int_0^r e^{\lambda(x)/2}\, dx \tag{11,12}$$

gegeben ist. Die Integrationskonstante $C$ in (11,10) müssen wir Null setzen, damit $g^{11} = e^{-\lambda}$ bei $r = 0$ endlich bleibt; es gilt also

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - 2m(r)/r. \tag{11,13}$$

Während es uns in (11,13) gelungen ist, unabhängig von einer speziellen Zustandsgleichung eine der metrischen Funktionen explizit anzugeben, müssen wir von der weiteren Integration der Feldgleichungen die Zustandsgleichung fixieren. Die einfachste Möglichkeit ist die Annahme einer konstanten Ruhemassendichte,

$$\mu = \text{const}. \tag{11,14}$$

Sicher gibt diese Zustandsgleichung kein besonders gutes Sternmodell; nur für kleine Sterne, in denen der Druck nicht zu groß ist, ist eine konstante Massendichte eine erste Näherung. Die kugelsymmetrische statische Lösung mit der speziellen Zustandsgleichung (11,14) nennt man *innere Schwarzschild-Lösung*.

Für konstante Massendichte wird aus (11,13)

$$e^{-\lambda} = 1 - Ar^2, \qquad A = \frac{1}{3}\varkappa\mu c^2, \tag{11,15}$$

und die Gl. (11,9), nämlich

$$(p + \mu c^2)' = -\frac{\nu'}{2}(p + \mu c^2),$$

läßt sich durch

$$p + \mu c^2 = B\, e^{-\nu/2} \tag{11,16}$$

integrieren. Als dritte noch zu lösende Feldgleichung wählen wir die Kombination

$$\varkappa(\mu c^2 + p) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right) = \varkappa B\, e^{-\nu/2}$$

von (11,6a) und (11,6c). Nach Einsetzen von $e^{-\lambda}$ geht sie in

$$e^{\nu/2}\left(\frac{\nu'}{r} - Ar\nu' + 2A\right) = \varkappa B$$

über und läßt sich über die Zwischenstufe

$$2(1 - Ar^2)^{3/2}\,[e^{\nu/2}(1 - Ar^2)^{-1/2}]' = \varkappa Br$$

leicht lösen:

$$e^{\nu/2} = \frac{\varkappa B}{2A} - D\sqrt{1 - Ar^2}. \tag{11,17}$$

Die Gln. (11,14) bis (11,17) geben die allgemeine Lösung für den Fall konstanter Massendichte; sie enthalten zwei Integrationskonstanten $B$ und $D$, die durch Übergangsbedingungen zu bestimmen sind.

## 11.3. Übergangsbedingungen und Anschluß an die äußere Schwarzschild-Lösung

Aus der Maxwell-Theorie weiß man, daß an der Grenzfläche zweier Medien Übergangsbedingungen für bestimmte Feldstärkekomponenten erfüllt werden müssen; diese Übergangsbedingungen folgen aus den Maxwell-Gleichungen. Ganz analog müssen wir hier, wenn wir das gesamte Gravitationsfeld aus der Lösung im Innern des Sterns (der inneren Schwarzschild-Lösung) und der Lösung im Außenraum (der Schwarzschild-Lösung) zusammensetzen wollen, an der Sternoberfläche gewisse Stetigkeitseigenschaften der Metrik sichern. Wie wir in Kapitel 16. zeigen werden, folgen die entsprechenden Übergangsbedingungen aus den Einsteinschen Feldgleichungen. Da wir in unserem einfachen Beispiel mit physikalischen Plausibilitätsbetrachtungen auskommen werden, beschränken wir uns hier auf einige kurze Bemerkungen zu den Übergangsbedingungen.

Stetigkeitseigenschaften der Metrik und ihrer Ableitungen können offensichtlich durch Koordinatentransformationen und ungeeignete Koordinatenwahl zerstört werden. Wir formulieren die Übergangsbedingungen deshalb am einfachsten in einem speziellen Koordinatensystem, in dem die Grenzfläche eine Koordinatenfläche $x^4 = \text{const}$ (in unserem Beispiel $r = r_0$) ist und in der Umgebung der Grenzfläche Gaußsche Koordinaten

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon(\mathrm{d}x^4)^2 + g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta, \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{11,18}$$

benutzt werden ($\varepsilon = +1$, wenn $x^4$ eine raumartige Koordinate ist). Da in den Feldgleichungen zweite Ableitungen der Metrik vorkommen, muß deren Existenz gesichert sein, d. h., wir fordern

$$g_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad g_{\alpha\beta,4} \quad \text{stetig auf der Grenzfläche } x^4 = \text{const.} \tag{11,19}$$

Mit dieser Forderung haben wir Flächenbelegungen ($\delta$-funktionsartige Singularitäten im Energieimpulstensor) ausgeschlossen.

Um innere und äußere Schwarzschild-Lösung auf der Sternoberfläche $r = r_0$ aneinander anzuschließen, müßten wir also zunächst (innen und außen getrennt) durch

$$\mathrm{d}x^4 = \mathrm{d}r\,\mathrm{e}^{\lambda(r)/2} \tag{11,20}$$

Gaußsche Koordinaten einführen und durch Wahl der noch freien Integrationsparameter $B$, $D$ (der inneren Lösung) und $M$ (der äußeren Lösung) die Bedingungen (11,19) zu erfüllen versuchen. Wir wollen aber hier anschaulicher vorgehen; die Äquivalenz der beiden Wege mag sich der Leser überlegen.

Wir fordern nämlich, daß die Metrik $g_{nm}$ für $r = r_0$ stetig ist und daß auf der Sternoberfläche der Druck $p$ verschwindet. Da der Druck wegen (11,16) und (11,17) gemäß

$$p = B\,\mathrm{e}^{-\nu/2} - \mu c^2 = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{3AD\sqrt{1 - Ar^2} - \dfrac{\varkappa}{2}B}{\dfrac{\varkappa B}{2A} - D\sqrt{1 - Ar^2}} \tag{11,21}$$

von $r$ abhängt, entsprechen dieser Forderung die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &e^{\lambda} \text{ stetig:} && 1 - Ar_0^2 = 1 - 2M/r_0, \\ &e^{\nu} \text{ stetig:} && \left(\frac{\varkappa B}{2A} - D\sqrt{1 - Ar_0^2}\right)^2 = 1 - 2M/r_0, \\ &p = 0: && 3AD\sqrt{1 - Ar_0^2} = \frac{\varkappa}{2} B. \end{aligned} \tag{11,22}$$

Sie haben die Lösung

$$\begin{aligned} M &= \frac{A}{2} r_0^3 = \frac{\varkappa\mu c^2}{6} r_0^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 f \frac{\mu}{c^2}, \\ D &= \frac{1}{2}, \\ \varkappa B &= 3A\sqrt{1 - Ar_0^2} = \varkappa\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{3}\varkappa\mu c^2 r_0^2}, \end{aligned} \tag{11,23}$$

durch die alle Integrationskonstanten auf die Massendichte $\mu$ und den Sternradius $r_0$ zurückgeführt werden.

Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld eines Sterns der Massendichte $\mu = \text{const}$ und des Radius $r_0$ wird also innen durch die innere Schwarzschild-Lösung

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{1 - Ar^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \\ &\quad - \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - Ar_0^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2}\right]^2 c^2\, dt^2, \\ \mu &= \text{const}, \quad A = \frac{1}{3}\varkappa\mu c^2, \quad \varkappa p = 3A\,\frac{\sqrt{1 - Ar^2} - \sqrt{1 - Ar_0^2}}{3\sqrt{1 - Ar_0^2} - \sqrt{1 - Ar^2}} \end{aligned} \tag{11,24}$$

und außen durch die äußere (Vakuum-) Schwarzschild-Lösung

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2\, dt^2, \\ 2M &= Ar_0^3 \end{aligned} \tag{11,25}$$

beschrieben (Schwarzschild 1916).

Wir möchten darauf hinweisen, daß in den hier benutzten Koordinaten $\partial g_{rr}/\partial r$ auf der Grenzfläche $r = r_0$ unstetig ist, diese Unstetigkeit aber durch eine Koordinatentransformation behoben werden kann.

## 11.4. Diskussion der inneren Schwarzschild-Lösung

Bei der Deutung der Konstanten $M$ muß man beachten, daß $M$ ein Maß für die nach außen wirksame Gesamtmasse (felderzeugende Masse) des Sterns ist; diese ist, wie (11,23) zeigt, zwar dem *Koordinatenvolumen* $4\pi r_0^3/3$ proportional, jedoch nicht dem echten dreidimensionalen Volumen des Sterns.

Während die Massendichte $\mu$ konstant ist, steigt der Druck $p$ nach innen an; die Lösung ist nichtsingulär, solange $p$ endlich ist. Bei $r = 0$, wo $p$ seinen Maximalwert annimmt, ist dies wegen (11,24) nur für

$$3\sqrt{1 - Ar_0^2} > 1\,,$$

d. h.

$$r_0 > \frac{9}{8}\, 2M\,, \tag{11,26}$$

möglich. Diese Ungleichung ist so zu interpretieren, daß bei vorgegebener Gesamtmasse $M$ die innere Lösung nur dann regulär ist (existiert), wenn der Sternradius $r_0$ groß genug ist, auf jeden Fall größer als der Schwarzschild-Radius $2M$. Bei normalen Sternen vom Typ unserer Sonne ist dies immer der Fall, bei Sternen mit sehr dichter Materie (Kernmaterie) kann (11,26) unerfüllbar sein. Es gibt dann keine innere Schwarzschild-Lösung und, wie wir später (Abschnitt 23.2.) ausführlicher darstellen werden, überhaupt keine stabile innere Lösung mehr.

Der dreidimensionale Ortsraum

$$\mathrm{d}^{(3)}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - Ar^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{11,27}$$

der inneren Schwarzschild-Lösung hat eine besonders einfache Geometrie. Man sieht dies am besten, wenn man durch $r = A^{-1/2}\sin\chi$ eine neue Koordinate $\chi$ einführt und damit das Linienelement (11,27) auf die Form

$$\mathrm{d}^{(3)}s^2 = \frac{1}{A}\,[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)] \tag{11,28}$$

transformiert. Die Metrik (11,28) ist die einer dreidimensionalen Hyperkugel vom Radius $R = A^{-1/2}$, deren Darstellung in einem flachen vierdimensionalen euklidischen Einbettungsraum

$$\begin{aligned} z_1 &= R\cos\chi\,, & z_3 &= R\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi\,,\\ z_2 &= R\sin\chi\cos\vartheta\,, & z_4 &= R\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi\,,\\ R^2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{11,29}$$

ist. Es handelt sich also um einen dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung, dessen Krümmungstensor die einfache Gestalt

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = A(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}) \tag{11,30}$$

hat (vgl. z. B. (1,38) und Abschnitt 21.2.). In diesem Raum sind geometrisch alle Punkte gleichwertig; physikalisch sind natürlich die Punkte im Stern „unterscheidbar", weil $g_{44}$ (d. h. im wesentlichen der Druck $p$) ortsabhängig ist.

## 12. Die Reissner-Weyl-Lösung

Die Reissner-Weyl-Lösung (REISSNER 1916) ist das kugelsymmetrische, statische Außenfeld einer geladenen Massenverteilung. Wie wir ohne Beweis angeben wollen, wird das Gravitationsfeld durch die Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\varkappa e^2}{2r^2}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\varkappa e^2}{2r^2}\right) c^2\, dt^2 \tag{12,1}$$

und das elektromagnetische Feld durch das Viererpotential

$$A_\alpha = 0, \qquad U = -A_4 = e/r \tag{12,2}$$

beschrieben. Das Potential (12,2) ist eine Lösung der quellenfreien Maxwell-Gleichungen

$$[\sqrt{-g}\, g^{ma} g^{nb} (A_{b,a} - A_{a,b})]_{,n} = 0 \tag{12,3}$$

im Riemannschen Raum der Metrik (12,1), und die Metrik (12,1) erfüllt die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{in} - \frac{1}{2} R g_{in} = \varkappa T_{in} \tag{12,4}$$

mit dem Energieimpulstensor des Maxwell-Feldes (12,2) auf der rechten Seite. Das System (12,1) bis (12,2) ist also eine strenge Lösung der gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen.

Da für große $r$ die Terme $\varkappa e/2r^2$ in der Metrik vernachlässigt werden können, wird ein in großer Entfernung befindlicher Beobachter $m = 8\pi M/\varkappa c^2$ als Gesamtmasse der Quelle interpretieren [vgl. (10,21)]. Aus (12,2) liest man ab, daß $Q = 4\pi e$ die Gesamtladung der Quelle ist.

Himmelskörper sind praktisch ungeladen, in ihrer Metrik kann der Einfluß des elektromagnetischen Feldes vernachlässigt werden, die Reissner-Weyl-Lösung kann durch ihren Spezielfall, die Schwarzschild-Lösung, ersetzt werden. Ursprünglich hoffte man, mit der Reissner-Weyl-Lösung ein brauchbares Modell eines Elektrons gefunden zu haben. Aber selbst für das Elektron, das Teilchen mit der größten Ladung pro Masse, hat $\varkappa e^2/M$ nur den Wert $2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Der Einfluß des Terms $\varkappa e^2/2r^2$ wird also erst in solchen Dimensionen wichtig, in denen schon längst Effekte der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie überwiegen und die Allgemeine Relativitätstheorie und die klassische Elektrodynamik zur Beschreibung der Eigenschaften der Materie nicht mehr ausreichen.

Die Riessner-Weyl-Lösung hat also nur eine geringe physikalische Bedeutung. Sie verdient jedoch Beachtung als einfaches Beispiel einer strengen Lösung der Einstein-Maxwell-Gleichungen.

*Literatur zu Kapitel 12.:*

[181], [206].

# Linearisierte Gravitationstheorie, Fernfelder und Gravitationswellen

## 13. Die linearisierte Einsteinsche Gravitationstheorie

### 13.1. Berechtigung und Gültigkeitsbereich einer linearisierten Theorie

Man spricht von einer linearisierten Theorie, wenn die Metrik nur wenig von der eines flachen Raumes abweicht:

$$g_{mn} = \eta_{mn} + f_{mn}, \qquad f_{mn} \ll 1, \tag{13,1}$$

und man deshalb in den Einsteinschen Gleichungen alle in $f_{mn}$ oder seinen Ableitungen nichtlinearen Terme wegstreichen und den Energieimpulstensor $T^{ik}$ durch seine speziell-relativistische Form ersetzen kann.

Dieser Energieimpulstensor genügt dann der speziell-relativistischen Gleichung

$$T^{ik}{}_{,k} = 0. \tag{13,2}$$

Da in (13,2) keine kovarianten Ableitungen auftreten, hat in der linearisierten Theorie das Gravitationsfeld keinen Einfluß auf die Bewegung der felderzeugenden Materie. Man kann sich den Energieimpulstensor beliebig vorgeben, solange nur (13,2) erfüllt ist, und das zugehörige Gravitationsfeld berechnen. Diese scheinbar recht vorteilhafte Eigenschaft der linearisierten Theorie hat jedoch zur Folge, daß das Gravitationsfeld der strengen Lösung erheblich von dem der linearisierten Theorie abweichen kann, wenn sich die Quellen des Feldes (unter dem Einfluß ihres eigenen Gravitationsfeldes) ganz anders bewegen als zunächst vermutet und vorausgesetzt. Es ist also durchaus möglich, daß es gar keine strenge Lösung gibt, die in den wesentlichen Zügen mit denen einer speziellen Lösung der linearisierten Theorie übereinstimmt. Da man Näherungsverfahren aber gerade dort verwenden möchte, wo die exakte Lösung unbekannt ist, muß man bei Folgerungen aus den Ergebnissen der linearisierten Theorie vorsichtig sein.

Die Aussagen der linearisierten Theorie werden dann zuverlässig sein, wenn wir die Bewegung der Quellen gut kennen und diese Quellen nicht zu massereich sind (das von ihnen erzeugte Feld schwach ist); dies ist z. B. im Planetensystem erfüllt. Außerdem kann man sie benutzen, um die Felder (von als bekannt angesehenen Quellen) in großer Entfernung von diesen Quellen zu analysieren oder die Metrik und das Gravitationsfeld in der Umgebung eines Punktes zu beschreiben, in dem wir ein lokal-geodätisches Koordinatensystem eingeführt haben. Wie schon (13,1) zeigt, ist die linearisierte Theorie genau so weit anwendbar, wie man nahezu kartesische Koordinaten einführen kann. Vom Standpunkt des (gekrümmten) Weltalls aus wird es sich immer um lokale Anwendungen handeln.

## 13.2. Die Grundgleichungen der linearisierten Theorie

Wie wir bereits in Abschnitt 9.2., Gl. (9,14), gezeigt haben, hat der zur Metrik (13,1) gehörende Krümmungstensor bei Vernachlässigung aller in den $f_{mn}$ nichtlinearen Terme die Gestalt

$$R^a{}_{mbn} = \tfrac{1}{2}\,\eta^{as}(f_{sn,mb} + f_{mb,sn} - f_{mn,bs} - f_{bs,mn}). \tag{13,3}$$

Für die weiteren Rechnungen wollen wir vereinbaren, daß Indizes in den $f_{mn}$ und ihren Ableitungen immer mit der Flachraummetrik $\eta_{ab}$ bewegt werden, also

$$f^{ab} = \eta^{am}\eta^{bn}f_{mn}, \qquad f^a{}_a = \eta^{ab}f_{ab}, \ldots, \tag{13,4}$$

gilt. Aus (13,3) erhalten wir damit die linearisierten Feldgleichungen

$$\begin{aligned} R_{mn} - \frac{R}{2}\,\eta_{mn} = -\frac{1}{2}\,[&f_{mn}{}^{,a}{}_{,a} + f^a{}_{a,mn} - f^a{}_{n,ma} - f^a{}_{m,na} - \eta_{mn}f^i{}_i{}^{,a}{}_{,a} \\ &+ \eta_{mn}f^{ab}{}_{,ab}] = \varkappa T_{mn}. \end{aligned} \tag{13,5}$$

Die folgenden Überlegungen dienen dazu, durch geeignete Definitionen und Nebenbedingungen (Koordinatentransformationen) die Feldgleichungen einfacher und mathematisch durchsichtiger zu formulieren. Die Analogie dieses Vorgehens zu dem in der Elektrodynamik üblichen haben wir in der Tab. 13.1 dargestellt.

Zunächst führen wir statt der Größen $f_{mn}$ neue Feldfunktionen $\bar f_{mn}$ ein, die in der Entwicklung

$$\sqrt{-g}\,g^{mn} = \eta^{mn} - \bar f^{mn} \tag{13,6}$$

der Dichte des metrischen Tensors auftreten und mit den alten durch die Gleichungen

$$\bar f_{mn} = f_{mn} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{mn}f^a{}_a, \qquad f_{mn} = \bar f_{mn} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{mn}\bar f^a{}_a, \qquad f^a{}_a = -\bar f^a{}_a \tag{13,7}$$

verknüpft sind. Die Feldgleichungen (13,5) lauten dann

$$\bar f_{mn}{}^{,a}{}_{,a} + \eta_{mn}\bar f^{ab}{}_{,ab} - \bar f^a{}_{n,ma} - \bar f^a{}_{m,na} = -2\varkappa T_{mn}. \tag{13,8}$$

Wir werden sie jetzt durch Koordinatentransformationen der Gestalt

$$\tilde x^n = x^n + b^n(x^i) \tag{13,9}$$

weiter vereinfachen (diese Transformationen sind das Analogon der Eichtransformationen der Elektrodynamik). Aus (13,9) folgt

$$\begin{aligned} \tilde g^{mn} &= g^{as}(\delta^n_a + b^n{}_{,a})\,(\delta^m_s + b^m{}_{,s}), \\ \tilde g \;&= |\tilde g^{mn})^{-1} = g(1 + 2b^a{}_{,a})^{-1} \end{aligned} \tag{13,10}$$

und damit

$$\tilde{\bar f}{}^{mn} = \bar f^{mn} - b^{n,m} - b^{m,n} + \eta^{mn}b^a{}_{,a}. \tag{13,11}$$

Die vier Funktionen $b^n(x^i)$ sind frei wählbar; natürlich darf durch die Transformation (13,9) der Rahmen der linearisierten Theorie nicht verlassen werden, es muß $\tilde{\bar f}{}^{mn} \ll 1$ gelten. Setzt man (13,11) in die Feldgleichungen (13,8) ein, dann sieht man, daß die Feldgleichungen bei der Wahl

$$\Box\, b^n = \eta^{rs}b^n{}_{,rs} = \bar f^{mn}{}_{,m} \tag{13,12}$$

besonders einfach werden. Die Feldgrößen $\bar{f}^{mn}$ (wir lassen von jetzt an die Tilde wieder weg) erfüllen dann nämlich die Gleichung

$$\bar{f}^{mn}{}_{,n} = \left(\sqrt{-g}\, g^{mn}\right)_{,n} = 0 \tag{13,13}$$

(wir verwenden also die in Abschnitt 10.6. erwähnten harmonischen Koordinaten), und die Einsteinschen Feldgleichungen reduzieren sich auf die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Box\, \bar{f}_{mn} = \bar{f}_{mn}{}^{,a}{}_{,a} = -2\varkappa T_{mn}. \tag{13,14}$$

Natürlich darf man nur solche Lösungen der Feldgleichungen (13,14) nehmen, die die Nebenbedingungen (13,13) erfüllen; die Existenz solcher Lösungen wird durch (13,2) gesichert.

## 13.3. Diskussion der Grundgleichungen und Vergleich mit der speziell-relativistischen Elektrodynamik

Die Grundgleichungen (13,14) bzw. (13,8) haben ganz das übliche Aussehen der Gleichungen einer klassischen Feldtheorie im Minkowski-Raum. Sie sind linear und nach Einführung der Nebenbedingung (13,13) sogar entkoppelt. Man kann die Vorstellung eines Riemannschen Raumes vollkommen verdrängen und die $\bar{f}_{mn}$ als Komponenten eines Tensorfeldes ansehen, durch das in einem flachen Raum das Gravitationsfeld beschrieben wird. Die Wirkung dieses Feldes auf ein Testteilchen ist dann (entsprechend der Geodätengleichung) durch

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^a}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{1}{2}\,\eta^{ab}(f_{bm,n} + f_{bn,m} - f_{nm,b})\,\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\tau} \tag{13,15}$$

gegeben. Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen sind lorentzinvariant.

Obwohl diese Art Gravitationstheorie sehr verlockend ist (und deshalb gelegentlich als eigentlich richtige Theorie der Schwerkraft interpretiert wurde), hat sie doch einen schwerwiegenden Mangel: Die Schwerkraft wirkt nicht auf die Quellen des Feldes zurück. Versucht man, dies zu korrigieren, wird man auf die Einsteinsche Theorie zurückgeführt.

Die auffallende Analogie zwischen den linearisierten Einsteinschen Gleichungen und der Elektrodynamik zeigt die folgende Übersicht (Tab. 13.1).
Auch in der linearisierten Gravitationstheorie können wir die Lösung der Feldgleichungen quellenmäßig darstellen, nämlich in der Form von „retardierten Potentialen“

$$\bar{f}_{mn}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{T_{mn}\left(\bar{\boldsymbol{r}}, t - \dfrac{|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|}\, \mathrm{d}^3\bar{x}. \tag{13,16}$$

Zu dieser speziellen Lösung kann man immer noch Lösungen der homogenen Gleichungen

$$\Box\, \bar{f}_{mn} = 0, \qquad \bar{f}^{mn}{}_{,n} = 0 \tag{13,17}$$

addieren und dadurch z. B. von den retardierten zu den avancierten Lösungen übergehen.

Tabelle 13.1

| Maxwell-Theorie | Linearisierte Einstein-Theorie |
|---|---|
| Grundgrößen des Feldes | |
| Viererpotential $A_m$ | $\bar f_{mn}$ |
| Feldgleichungen allgemein | |
| $A_m{}^{,a}{}_{,a} - A^a{}_{,m,a} = -\frac{1}{c}\, j_m$ | $\bar f_{mn}{}^{,a}{}_{,a} + \eta_{mn}\bar f^{ab}{}_{,ab} - \bar f^a{}_{n,am} - \bar f^a{}_{m,na} = -2\varkappa T_{mn}$ |
| Feldgleichungen sind invariant gegenüber | |
| Eichtransformationen | Koordinatentransformationen |
| $\tilde A_m = A_m + b_{,m}$ | $\tilde{\bar f}_{mn} = \bar f_{mn} - b_{n,m} - b_{m,n} + \eta_{mn} b^a{}_{,a}$ |
| (Feldstärketensor invariant) | (Christoffel-Symbole geändert, Krümmungstensor invariant) |
| Nebenbedingung | |
| $A^a{}_{,a} = 0$ | $\bar f^{mn}{}_{,n} = 0$ |
| Dadurch vereinfachte Form der Feldgleichungen | |
| $\Box A_m = -\frac{1}{c}\, j_m$ | $\Box \bar f_{mn} = -2\varkappa T_{mn}$ |
| Noch mögliche Eichtransformationen eingeschränkt durch | |
| $\Box b = 0$ | $\Box b^n = 0.$ |

Gelegentlich ist es zweckmäßiger, die Metrik durch eine Koordinatentransformation

$$\tilde f_{mn} = f_{mn} - b_{m,n} - b_{n,m} \tag{13,18}$$

zu vereinfachen und *keine* harmonischen Koordinaten zu benutzen. Eine solche Transformation kann reine Koordinateneffekte beseitigen, d. h. Terme, die zum Krümmungstensor keinen Beitrag geben.

## 13.4. Das Fernfeld einer zeitabhängigen Quelle

In der Elektrodynamik lernt man, daß im Fernfeld einer beliebigen Ladungs- und Stromverteilung im allgemeinen folgende Anteile dominieren (in Klammern die charakteristische $r$-Potenz): elektrostatischer Polterm ($r^{-1}$), elektrostatischer und magnetostatischer Dipol ($r^{-2}$), elektrostatischer Quadrupol ($r^{-3}$), schwingender elektrischer bzw. magnetischer Dipol und elektrischer Quadrupol (alle $r^{-1}$). Da für nicht zu schnell bewegte Ladungen wegen $j^n = (\varrho \mathbf{v}, \varrho c)$ die räumlichen Anteile der Viererstromdichte eine $c$-Potenz kleiner sind als die zeitlichen, ist die von einem System ausgehende elektromagnetische Strahlung im wesentlichen die eines schwingenden elektrischen Dipols.

Wir wollen jetzt in ähnlicher Weise das Gravitations-Fernfeld einer Massenverteilung untersuchen und charakterisieren. Die Rechnungen dazu sind zwar einfach, aber etwas langwierig. Zur besseren Übersicht teilen wir sie in drei Schritte auf.

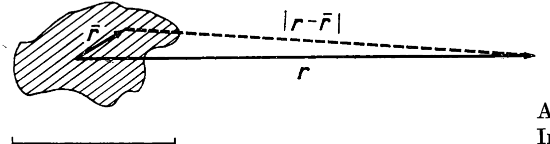



Abb. 13.1
Inselförmige Materieverteilung

*1. Schritt: Potenzreihenentwicklung des Integranden von* (13,16). Wir nehmen an, daß es sich um eine inselförmige Materieverteilung handelt, d. h. $T_{mn}$ nur innerhalb eines endlichen Raumgebietes von Null verschieden ist (Abb. 13.1). Im Fernfeld können wir dann $|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|$ durch die ersten Glieder einer Potenzreihenentwicklung ersetzen:

$$|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\boldsymbol{r}^2 - 2\boldsymbol{r}\bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{r}}^2} = r - \frac{x^\alpha \bar{x}^\alpha}{r} - \frac{1}{2}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}(\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta - \bar{r}^2 \delta^{\alpha\beta}) + \ldots,$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|} = \frac{1}{r} + \frac{x^\alpha \bar{x}^\alpha}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}(3\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta - \bar{r}^2 \delta^{\alpha\beta}) + \ldots \tag{13,19}$$

Denken wir uns die Reihe (13,19) in das Argument $t - |r - \bar{\boldsymbol{r}}|/c$ des Energieimpulstensors eingesetzt und eine Entwicklung der Komponenten $T_{mn}$ durchgeführt, dann entsteht

$$T_{mn}(\bar{\boldsymbol{r}}, t - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|/c) = T_{mn}(\bar{\boldsymbol{r}}, t - r/c) + \frac{1}{c}\dot{T}_{mn}(\bar{\boldsymbol{r}}, t - r/c)\{r - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|\}$$
$$+ \frac{1}{2c^2}\ddot{T}_{mn}(\bar{\boldsymbol{r}}, t - r/c)\{r - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|\}^2 + \ldots \tag{13,20}$$

Bei einer zeitlich periodischen Bewegung der Materie (Frequenz $\omega$) ist das Weglassen höherer Zeitableitungen dann gerechtfertigt, wenn der Durchmesser $D$ der Materieverteilung klein gegen $c/\omega$ ist, also klein gegenüber der Wellenlänge der ausgestrahlten Welle.

Der Integrand von (13,16) hat nach Einsetzen von (13,19) und (13,20) die Gestalt

$$\frac{T_{mn}(\bar{\boldsymbol{r}}, t - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|/c)}{|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|} = T_{mn}\left[\frac{1}{r} + \frac{x^\alpha \bar{x}^\alpha}{r^3} + \frac{x^\alpha x^\beta}{2r^5}(3\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta - \bar{r}^2\delta^{\alpha\beta})\right]$$
$$+ \frac{\dot{T}_{mn}}{c}\left[\frac{x^\alpha \bar{x}^\beta}{r^2} + \frac{x^\alpha x^\beta}{2r^4}(3\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta - \bar{r}^2\delta^{\alpha\beta}\right]$$
$$+ \frac{\ddot{T}_{mn}}{c^2}\left[\frac{1}{2}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta)\right], \tag{13,21}$$

wobei wir auf der rechten Seite das Argument $t - r/c$ in $T_{mn}$ und seinen Ableitungen unterdrückt haben.

*2. Schritt: Definition der Momente des Energieimpulstensors und Vereinfachung durch Lorentz-Transformationen und Erhaltungssätze.* Für nicht zu schnell bewegte Materie überwiegt die Komponente $T_{44}$ des Energieimpulstensors, es gilt

$$|T_{44}| \gg |T_{4\alpha}| \gg |T_{\alpha\beta}|. \tag{13,22}$$

Dementsprechend genügt es, sich beim Einsetzen des Integranden (13,21) in die Lösungsformel (13,16) auf die Auswertung der folgenden Integrale zu beschränken:

$$\begin{aligned} &\int T_{44}\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv m, && \int T_{44}\bar{x}^\alpha\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv d^\alpha, && \int T_{44}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv d^{\alpha\beta} \\ &\int T_{4\nu}\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv -p_\nu, && \int T_{4\nu}\bar{x}^\alpha\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv b_\nu{}^\alpha, && \int T_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^3\bar{x} \equiv a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{13,23}$$

Alle diese Größen sind im Prinzip Funktionen der retardierten Zeit $t - r/c$. Aus dem Energiesatz

$$T^{n4}{}_{,4} = -T^{n\mu}{}_{,\mu} \tag{13,24}$$

und dem Drehimpulssatz

$$(T^{4m}\bar{x}^s - T^{4s}\bar{x}^m)_{,4} = -(T^{\nu m}\bar{x}^s - T^{\nu s}\bar{x}^m)_{,\nu} \tag{13,25}$$

folgt aber durch Integration über die Materieverteilung und Anwendung des Gaußschen Satzes (alle Operationen geschehen ja in einem flachen Raum)

$$m = \text{const}, \quad p^\nu = \text{const}, \quad b^{\nu\alpha} - b^{\alpha\nu} = B^{\nu\alpha} = \text{const}, \quad \dot{d}^\alpha/c = p^\alpha. \tag{13,26}$$

Wir können also durch eine Lorentz-Transformation den Dreierimpuls $p^\alpha$ auf Null transformieren und anschließend (wegen $m > 0$) durch eine Nullpunktverschiebung des räumlichen Koordinatensystems das Massendipolmoment $d^\alpha$ wegtransformieren.

Aus den beiden Erhaltungssätzen (13,24) bis (13,25) folgen außerdem noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &T^{4\alpha}\bar{x}^\beta + T^{4\beta}\bar{x}^\alpha = (T^{44}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta)_{,4} + (T^{4\nu}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta)_{,\nu}, \\ &(T^{44}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta)_{,44} = (T^{\mu\nu}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta)_{,\mu\nu} - 2(T^{\mu\alpha}\bar{x}^\beta + T^{\mu\beta}\bar{x}^\alpha)_{,\mu} + 2T^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{13,27}$$

die nach Integration auf die Beziehungen

$$b^{\alpha\beta} + b^{\beta\alpha} = -\dot{d}^{\alpha\beta}/c, \qquad a_{\alpha\beta} = \ddot{d}_{\alpha\beta}/2c^2 \tag{13,28}$$

zwischen den Momenten des Energieimpulstensors führen.

Insgesamt lassen sich also gemäß

$$\begin{aligned} &m = \text{const}, \quad p^\nu = 0, \quad d^\nu = 0, \quad B_{\nu\alpha} = \text{const}, \\ &b_{\nu\alpha} = \left(B_{\nu\alpha} - \frac{1}{c}\,\dot{d}_{\nu\alpha}\right)\Big/2, \qquad a_{\alpha\beta} = \ddot{d}_{\alpha\beta}/2c^2 \end{aligned} \tag{13,29}$$

alle interessierenden Momente durch die Masse $m$, den Drehimpuls $B_{\nu\alpha}$ und das Massen-Quadrupolmoment $d_{\alpha\beta}$ ausdrücken.

*3. Schritt: Aufschreiben der Metrik und Vereinfachung durch Koordinatentransformationen.* Einsetzen des Integranden (13,21) in die Lösungsformel (13,16), Benutzung der Bezeichnungen (13,23) und Berücksichtigung der Beziehungen (13,29) gibt

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\varkappa}\,\bar{f}_{44} = \frac{m}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{2r^5}\,(3d_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}d^\sigma_\sigma) + \frac{x^\alpha x^\beta}{2r^4c}\,(3\dot{d}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}\dot{d}^\sigma_\sigma) + \frac{x^\alpha x^\beta}{2c^2r^3}\,\ddot{d}_{\alpha\beta}, \\ &\frac{2\pi}{\varkappa}\,\bar{f}_{4\nu} = \frac{B_{\nu\alpha}x^\alpha}{2r^3} - \frac{\dot{d}_{\nu\alpha}x^\alpha}{2cr^3} - \frac{\ddot{d}_{\nu\alpha}x^\alpha}{2c^2r^2}, \\ &\frac{2\pi}{\varkappa}\,\bar{f}_{\nu\mu} = \frac{\ddot{d}_{\nu\mu}}{2c^2r}. \end{aligned} \tag{13,30}$$

Die Umrechnung auf die $f_{mn}$ liefert relativ komplizierte Ausdrücke, die wir nicht explizit angeben wollen. Der Leser mag durch Nachrechnen bestätigen, daß nach einer Koordinatentransformation (13,18) mit den erzeugenden Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\varkappa} b_4 &= \frac{x^\alpha x^\beta}{8r^4} (3d_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} d^\sigma_\sigma) + \frac{x^\alpha x^\beta}{8cr^3} (\dot{d}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \dot{d}^\sigma_\sigma), \\ \frac{2\pi}{\varkappa} b_\nu &= -\frac{3d_{\nu\alpha} x^\alpha}{4r^3} - \frac{\dot{d}_{\nu\alpha} x^\alpha}{2cr^2} + \frac{3d_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta x^\nu}{4r^5} + \frac{(\dot{d}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \dot{d}^\sigma_\sigma) x^\alpha x^\beta x^\nu}{8cr^4} \end{aligned} \tag{13,31}$$

in $f_{44}$ und $f_{4\nu}$ keine Zeitableitungen mehr enthalten sind. Das Fernfeld einer inselförmigen Materieverteilung hat dann in der linearisierten Theorie die Metrik

$$\begin{aligned} g_{44} &= -1 + f_{44} = -1 + \frac{2M}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^5} (3D_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} D^\sigma_\sigma) + O(r^{-4}), \\ g_{4\nu} &= f_{4\nu} = \frac{2x^\alpha}{r^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} P^\mu + O(r^{-3}), \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{2M}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^5} (3D_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} D^\sigma_\sigma)\right] \\ &\quad + \frac{2}{3c^2 r} (3\ddot{D}_{\nu\mu} - \eta_{\nu\mu} \ddot{D}^\lambda_\lambda) + \frac{\eta_{\nu\mu}}{3c^2 r^3} (3\ddot{D}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \ddot{D}^\lambda_\lambda) x^\alpha x^\beta \\ &\quad - \frac{(3\ddot{D}_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha} \ddot{D}^\lambda_\lambda)}{6c^2 r^3} x^\alpha x^\mu - \frac{(3\ddot{D}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\alpha} \ddot{D}^\lambda_\lambda)}{6c^2 r^3} x^\alpha x^\nu \\ &\quad + \frac{(3\ddot{D}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \ddot{D}^\lambda_\lambda)}{12c^2 r^5} x^\alpha x^\beta x^\nu x^\mu + O(r^{-2}) \end{aligned} \tag{13,32}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} &\text{Masse:} & M &= \frac{\varkappa}{8\pi} \int T_{44} \left(\bar{\mathbf{r}}, t - \frac{r}{c}\right) d^3\bar{x} = \text{const}, \\ &\text{Drehimpuls:} & P^\mu &= \varepsilon^{\mu\nu}{}_\alpha \frac{\varkappa}{8\pi} \int T_{4\nu} \left(\bar{\mathbf{r}}, t - \frac{r}{c}\right) \bar{x}^\alpha \, d^3\bar{x} = \text{const}, \\ &\text{Quadrupolmoment:} & D^{\alpha\beta} &= \frac{\varkappa}{8\pi} \int T_{44} \left(\bar{\mathbf{r}}, t - \frac{r}{c}\right) \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta \, d^3\bar{x} = D^{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right). \end{aligned} \tag{13,33}$$

## 13.5. Diskussion der Eigenschaften des Fernfeldes (linearisierte Theorie)

Wie wir schon in Abschnitt 9.2. gezeigt haben, ist $f_{44} = g_{44} + 1$ im wesentlichen das Newtonsche Potential der Massenverteilung. Es enthält hier einen Massen- und einen Quadrupolterm, aber keinen Dipolanteil (diesen haben wir durch Wahl des Koordinatensystems wegtransformiert). Vergleichen wir die lineare Näherung

$$g_{44} = -1 + \frac{2M}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^5} (3D_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} D^\sigma_\sigma) + O(r^{-4}) \tag{13,34}$$

mit der Entwicklung

$$g_{44} = -1 + 2M/r - 2M^2/r^2 + O(r^{-3}), \qquad (13,35)$$

der Schwarzschild-Metrik (in isotropen Koordinaten) nach Potenzen von $r^{-1}$ (vgl. (10,67)), dann sehen wir, daß das Mitnehmen des Quadrupolterms in $g_{44}$ nur in Ausnahmefällen gerechtfertigt ist. Fast immer werden die höheren, nichtlinearen Terme mit $M^2$ überwiegen, (13,34) ist nur bis zu Termen in $r^{-1}$ eine gute Näherung. Die gleiche Einschränkung gilt auch für den zu $\eta_{\mu\nu}$ proportionalen Teil von $g_{\mu\nu}$.

Interessant ist das Auftreten des Drehimpulses in $g_{4\nu}$. Die Newtonsche Theorie kennt keine Abhängigkeit des Gravitationsfeldes von der Rotation eines Himmelskörpers. Um die physikalische Bedeutung dieses Terms der Metrik zu erkennen, vergleichen wir (13,32) mit dem Koordinatensystem

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta - 2\varepsilon_{\beta\nu\mu} x^\nu \frac{\omega^\mu}{c}\, dx^4\, dx^\beta - \left(1 + \frac{2a_\nu x^\nu}{c^2}\right)(dx^4)^2 \qquad (13,36)$$

eines beliebig bewegten Beobachters, das wir in (8,17) eingeführt haben; dieses Koordinatensystem rotierte mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^\alpha = -\frac{c}{2}\, \varepsilon^{\alpha\beta\nu} g_{4\beta,\nu} \qquad (13,37)$$

gegenüber einem lokalen Inertialsystem. Unser hier benutztes Koordinatensystem, das wir bei der linearisierten Gravitationstheorie zugrunde legten und das wir mit dem System zu identifizieren haben, in dem die Fixsterne ruhen, ist also lokal ein rotierendes Koordinatensystem, oder umgekehrt, die lokalen Inertialsysteme rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega^\sigma = \frac{c}{2}\, \varepsilon^{\sigma\beta\nu} g_{4\beta,\nu} = -\left(\frac{cP^\sigma}{r^3} - \frac{3x^\sigma x_\nu P^\nu c}{r^5}\right) \qquad (13,38)$$

gegen den Fixsternhimmel. Dies könnte im Prinzip durch die Präzession eines Kreisels nachgewiesen werden (Lense-Thirring-Effekt, 1918). Für die Erde ist dieser Effekt der Erdrotation nur eine kleine Korrektur zur geodätischen Präzession (10,83). Das Analogon des Teils $g_{4\nu}$ der Metrik und seiner Wirkung ist in der Elektrodynamik das Magnetfeld, das von Strömen erzeugt wird und auf Dipole ein Drehmoment ausübt ($\Omega^\sigma$ hat genau die räumliche Struktur des Kraftfeldes eines Dipols).

Am wichtigsten für das Fernfeld einer Quelle sind die im Unendlichen stärksten, zu $r^{-1}$ proportionalen Terme, also die die Masse $M$ oder die zweite Ableitung des Quadrupolmomentes $D_{\alpha\beta}(t - r/c)$ enthaltenden Teile der Metrik (13,32). In der Elektrodynamik haben die entsprechenden Potentiale

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{4\pi r} + \frac{x^\alpha}{4\pi r^2}\left[\frac{\dot{p}_\alpha(t - r/c)}{c} + \frac{p_\alpha(t - r/c)}{r}\right] + O(r^{-2}), \\ A_\nu &= \frac{\dot{p}_\nu(t - r/c)}{4\pi r} \end{aligned} \qquad (13,39)$$

die Bedeutung des Fernfeldes einer Ladung $Q$ und eines schwingendes elektrischen Dipols $p_\alpha$, und die zu $\dot{p}_\alpha$ proportionalen Terme führen zur Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen. Wir können also vermuten, daß das Auftreten von $\ddot{D}_{\alpha\beta}/r$ in der

Metrik bedeutet, daß das System Gravitationswellen aussendet und daß (im Gegensatz zu der bei Ladungsverteilungen möglichen Dipolstrahlung) die Gravitationsstrahlung Quadrupolcharakter hat. Beide Vermutungen lassen sich in gewissem Umfang bestätigen. Um exaktere Aussagen machen zu können, muß man allerdings die linearisierte Theorie verlassen (auch in der Elektrodynamik ist der Poynting-Vektor, der die Strahlung charakterisiert, quadratisch in den Feldstärken).

*Literatur zu Kapitel 13.:*
[157], [212].

# 14. Fernfelder beliebiger Materieverteilungen und Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls

## 14.1. Was sind Fernfelder?

Die linearisierte Gravitationstheorie basiert auf der Voraussetzung, daß im *ganzen* betrachteten Raumgebiet, auf jeden Fall aber im Bereich der Quellen des Feldes, das Gravitationsfeld schwach ist, die Metrik nur wenig von der eines Minkowski-Raumes abweicht. Wie schon in der Einleitung zum vorigen Kapitel erwähnt wurde, treffen wir in der Natur häufig auf die folgende Situation: Eine Materieverteilung (ein Satellit in Erdnähe, die Erde, das Planetensystem, unsere Galaxis) ist von Vakuum umgeben, und die nächste Materie ist so weit entfernt, daß das Gravitationsfeld in einem *Zwischengebiet* schwach ist und die Metrik dort vom Minkowski-Raum nur um Glieder in $r^{-1}$ oder noch höheren $r$-Potenzen abweicht. In der Nähe der Quellen kann das Feld jedoch stark sein.

Wenn ein solches Zwischengebiet existiert, sprechen wir vom Fernfeld der betreffenden Anordnung (Abb. 14.1). Man beachte, daß wir nicht — wie bei den meisten Problemen z. B. der Elektrodynamik — einfach eine inselartige Materieverteilung voraussetzen dürfen, die ringsum nur von Vakuum umgeben ist. Die Annahme eines Nichts (des „unendlichen leeren Raumes“), in das Wellen enteilen und verschwinden, widerspricht der Grundkonzeption der Allgemeinen Relativitätstheorie, und auch die Tatsache, daß wir unser lokales Inertialsystem am Fixsternhimmel orientieren,

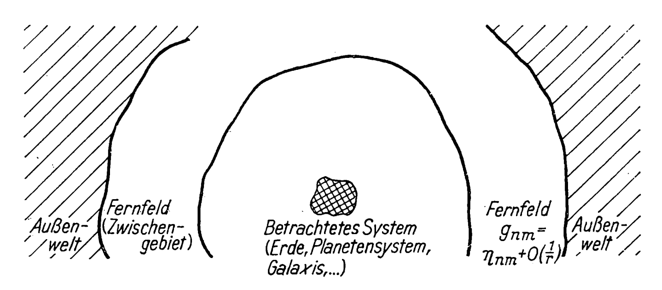



Abb. 14.1
Zur Definition des Fernfeldes

weist darauf hin, daß wir im Prinzip immer die Existenz der ganzen Welt berücksichtigen müssen, wenn wir Eigenschaften eines Teils der Welt untersuchen.

Während wir in der linearisierten Theorie *Näherungslösungen* der Feldgleichungen, deren Abhängigkeit von der Struktur der Quellen und deren Verhalten in großer Entfernung von den Quellen untersuchten, geht es hier um die Eigenschaften *strenger Lösungen* in Gebieten, wo die Gravitationsfelder schwach sind. Unser Ziel dabei ist, aus der Kenntnis des Fernfeldes Aussagen über das System selbst zu gewinnen.

Das einfachste Beispiel sind Gravitationsfelder, deren Fernfeld zeitunabhängig ist. Wir nehmen an, daß sich die Metrik in guter Näherung durch

$$g_{mn} = \eta_{mn} + a_{nm}/r + b_{nm}/r^2 + O(r^{-3}) \tag{14,1}$$

darstellen läßt. Da es sich bei dem Gebiet des Fernfeldes um ein Ringgebiet handelt und sich auch außerhalb Quellen befinden, müßten wir in (14,1) eigentlich noch eine Reihe mit steigenden Potenzen von $r$ hinzufügen. Wir lassen diese Terme jedoch weg; das entspricht dem Modell einer isotropen äußeren Umgebung.

Die von $r$ und $t$ unabhängigen Funktionen $a_{nm}$ und $b_{nm}$ sind durch Einsetzen von (14,1) in die Vakuumfeldgleichungen

$$R_{mn} = 0 \tag{14,2}$$

zu bestimmen. Wir können diese Rechnungen vereinfachen, indem wir uns zuerst Lösungen $\bar{f}_{nm}$ der linearisierten Feldgleichungen

$$\Delta \bar{f}_{nm} = 0, \qquad \bar{f}^{nm}{}_{,n} = 0 \tag{14,3}$$

verschaffen und dann die nichtlinearen Korrekturterme berechnen.

Jede Lösung der Potentialgleichung ist in der Form einer Entwicklung nach Multipolen darstellbar; es gilt also bis auf Terme in $r^{-3}$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{44} &= A/r + A_\alpha x^\alpha/r^3, \qquad \bar{f}_{4\nu} = B_\nu/r + B_{\nu\alpha} x^\alpha/r^3, \\ \bar{f}_{\mu\nu} &= \bar{f}_{\nu\mu} = C_{\nu\mu}/r + C_{\nu\mu\alpha} x^\alpha/r^3, \end{aligned} \tag{14,4}$$

wobei wegen der Nebenbedingung $\bar{f}^{nm}{}_{,n} = 0$ die Konstanten durch die algebraischen Bedingungen

$$\begin{aligned} B_\nu &= 0, \qquad B_{\nu\alpha} = \eta_{\nu\alpha} B + \varepsilon_{\nu\alpha\beta} F^\beta, \\ C_{\nu\mu} &= 0, \qquad C_{\nu\mu\alpha} = \delta_{\nu\mu} C_\alpha - \delta_{\mu\alpha} C_\nu - \delta_{\nu\alpha} C_\mu \end{aligned} \tag{14,5}$$

eingeschränkt sind. Durch eine Koordinatentransformation (13,10) mit

$$b^4 = B/r, \qquad b^\alpha = -C^\alpha/r \tag{14,6}$$

lassen sich $B$ und $C_{\nu\mu\alpha}$ beseitigen. Wie die Erfahrung zeigt, ist $A$ immer von Null verschieden (Masse ist immer positiv), so daß durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs auch $A_\alpha$ wegtransformiert werden kann. Insgesamt gibt die lineare Näherung also die Metrik

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= (\eta_{mn} + \bar{f}_{mn} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{mn} \bar{f}^a_a)\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}x^m \\ &= \left(1 + \frac{A}{2r}\right) \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta + \frac{2}{r^3}\,\varepsilon_{\nu\alpha\beta} x^\alpha F^\beta\,\mathrm{d}x^\nu\,\mathrm{d}x^4 - \left(1 - \frac{A}{2r}\right)(\mathrm{d}x^4)^2. \end{aligned} \tag{14,7}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Metrik (13,32), die wir aus der quellenmäßigen Darstellung der Felder ableiten, dann sehen wir, daß wir die Konstanten $A$ und $F^\beta$ gemäß

$$A = 4M, \qquad F^\beta = 2P^\beta \tag{14,8}$$

mit der Masse $M$ und dem Drehimpuls $P^\beta$ identifizieren können. Diese Identifizierung ist keine bloße Wiederholung der linearisierten Theorie. In der linearisierten Theorie waren Masse und Drehimpuls durch die Integrale (13,33) über die Quellverteilung definiert. Jetzt, bei der Untersuchung des Fernfeldes einer (unbekannten) Quelle, definieren wir als Masse bzw. Drehimpuls der Quelle genau die Koeffizienten der Entwicklung des Fernfeldes, die auf einen Probekörper oder einen Kreisel genauso wirken wie Masse bzw. Drehimpuls einer schwachen Quelle.

Wir haben jetzt noch an der Metrik (14,7) die Korrekturen anzubringen, die durch die Nichtlinearität der Einsteinschen Gleichungen entstehen; (14,7) ist ja noch keine Lösung der Feldgleichungen (14,2), selbst wenn wir Terme in $r^{-3}$ vernachlässigen. Da wir nur Terme bis zu $r^{-2}$ mitnehmen und Korrekturen durch die Nichtlinearität immer mindestens eine $r$-Potenz schwächer sind als die Originalterme, reicht es aus, die in dem Parameter Masse quadratischen Terme zu berücksichtigen. Diese können wir aber ohne zusätzlichen Rechenaufwand aus der exakten Schwarzschild-Lösung (10,63) durch Reihenentwicklung gewinnen.

Wir erhalten so das Ergebnis: Das Fernfeld einer beliebigen zeitunabhängigen Quelle hat in geeigneten Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & (1 + 2M/r + 3M^2/r^2)\, \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta + \frac{4}{r^3}\, \varepsilon_{\nu\alpha\beta} x^\alpha\, P^\beta\, \mathrm{d}x^\nu\, \mathrm{d}x^4 \\ & - (1 - 2M/r + 2M^2/r^2)\, (\mathrm{d}x^4)^2 + O(r^{-3}), \end{aligned} \tag{14,9}$$

wobei $M$ und $P^\alpha$ wegen ihrer Wirkung auf Testkörper und der Analogie zur linearisierten Theorie als Masse und Drehimpuls bezeichnet werden.

## 14.2. Der Energieimpulskomplex des Gravitationsfeldes

*Die Aufgabenstellung.* Die linearisierte Gravitationstheorie und ihre starke Analogie zur Elektrodynamik führten zu der Vermutung, daß zeitlich veränderliche gravitierende Systeme Gravitationswellen aussenden. Kann man durch Untersuchung des Fernfeldes feststellen, ob und wann solche Wellen existieren?

In einer speziell-relativistischen Feldtheorie würde man diese Frage wahrscheinlich folgendermaßen zu beantworten versuchen: Entscheidend für die Existenz von Wellen oder Strahlung ist nicht die bloße Zeitabhängigkeit von Feldern, sondern der Transport von Energie, Impuls und Drehimpuls von einem Raumgebiet in ein anderes. Man schließe also das betrachtete System z. B. in eine Kugelfläche ein, schreibe die Bilanzgleichungen für die genannten Größen auf und stelle fest, ob durch die Kugel z. B. ein Energiestrom fließt. Wenn dies der Fall ist, kann man von Strahlung sprechen (wenn nicht gerade Teilchen durch die Grenzfläche strömen und dadurch Energie usw. transportiert wird). Ausgangspunkt der rechnerischen Erfassung sind hier also die Bilanzgleichungen

$$T^{mn}{}_{,n} = 0, \qquad (T^{mn} x^a - T^{ma} x^n)_{,n} = 0 \tag{14,10}$$

für Impuls und Drehimpuls des betrachteten Feldes.

Wollen wir in der Gravitationstheorie einen ähnlichen Weg gehen, müssen wir uns einen Energieimpulstensor des Gravitationsfeldes (nicht der Materie!) verschaffen und aus ihm Bilanzgleichungen ableiten. In der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es jedoch nur einen einzigen Energieimpulstensor, nämlich den der Materie. Dessen Divergenz verschwindet zwar,

$$T^{mn}{}_{;n} = 0, \tag{14,11}$$

in einem Riemannschen Raum kann man aus (14,11) jedoch keinen integralen Erhaltungssatz herleiten, weil die Integration die Umkehrung der partiellen und nicht der kovarianten Ableitung ist und man auf die Divergenz eines symmetrischen Tensors 2. Stufe den Gaußschen Satz nicht anwenden kann (vgl. Kapitel 7.).

Da wir die Existenz von Gravitationswellen vermuten, kann uns diese negative Aussage eigentlich nicht überraschen: Wenn Energie in Form von Gravitationswellen transportiert werden kann, kann die Energie der Quellen für sich allein nicht erhalten bleiben. Man würde vielmehr erwarten, daß an die Stelle von (14,11) eine mit partiellen Ableitungen formulierte differentielle Bilanzgleichung der Struktur

$$[(-g)\,(T^{mn} + t^{mn})]_{,n} = 0 \tag{14,12}$$

tritt, die zum Ausdruck bringt, daß erst für die Summe der Materie ($T^{mn}$) und des Gravitationsfeldes ($t^{nm}$) ein Erhaltungssatz gilt.

Wir stellen uns also die Aufgabe, ein $t^{mn}$ aus der Metrik so zu konstruieren, daß (14,12) allein auf Grund der Feldgleichungen

$$G_{nm} = R_{nm} - \tfrac{1}{2}\,Rg_{mn} = \varkappa T_{nm} \tag{14,13}$$

erfüllt ist.

Ehe wir uns dieser Aufgabe zuwenden, wollen wir klar die Alternative formulieren, vor der wir stehen. Entweder wir wollen nur mit Tensoren rechnen und nur kovariante Aussagen zulassen; dann müssen wir (14,11) verwenden und können keine Bilanzgleichungen für den Energietransport durch Strahlung aufschreiben. Oder wir wollen eine solche Bilanzgleichung (14,12) — dann läßt sie sich nur in nichtkovarianter Weise formulieren; wie man aus (14,12) abliest, ist $t^{mn}$ kein Tensor, wir nennen ihn den *Energieimpulskomplex* des Gravitationsfeldes.

Da wir im Fernfeld sowieso in nichtkovarianter Weise eine Minkowski-Metrik auszeichnen, wollen wir die Verletzung der Kovarianz in (14,12) zunächst hinnehmen und erst später auf die Konsequenzen eingehen. Man kann sich jedoch mit guten Gründen für die Beibehaltung der Kovarianz entscheiden und der Ansicht sein, daß die Fragestellung eines Energietransports durch Gravitationswellen der Gravitationstheorie nicht angepaßt ist, weil hier das Konzept der Energie seinen Sinn verloren hat (vgl. Abschnitt 14.4.).

*Konstruktion des Energieimpulskomplexes $t^{mn}$.* Das soeben dargestellte Programm klingt vielleicht plausibel; es zeigt sich aber schon an der Ausgangsgleichung (14,12) ein Mangel: $t^{mn}$ ist nicht eindeutig bestimmt. Die Addition eines Termes der Gestalt $H^{ikl}{}_{,l}$ zu $(-g)\,t^{ik}$ ändert nämlich nichts an der Gültigkeit von (14,12), wenn nur $H^{ikl}$ in $k$ und $l$ antisymmetrisch ist:

$$(-g)\,\tilde{t}^{ik} = (-g)\,t^{ik} + H^{i[kl]}{}_{,l} \qquad [(-g)\,\tilde{t}^{ik}]_{,k} = [(-g)\,t^{ik}]_{,k}\,. \tag{14,14}$$

Man findet deshalb auch in der umfangreichen Literatur zu diesem Problem eine ganze Reihe verschiedener Vorschläge, die aber im Endeffekt bei der Formulierung

der Erhaltungssätze die gleichen Aussagen geben. Wir werden deshalb die von uns bevorzugte (Landau-Lifschitzsche) Gestalt von $t^{nm}$ auch nicht abzuleiten versuchen, sondern einen Ansatz aus plausibel erscheinenden Forderungen erraten und seine Richtigkeit verifizieren.

In Analogie zu den Eigenschaften der Energieimpulstensoren aller anderen Felder sollte $t^{mn}$ symmetrisch sein, bilinear in den ersten Ableitungen der Metrik und keine zweiten Ableitungen enthalten. Außerdem muß (14,12) bei Berücksichtigung der Feldgleichungen (14,13) identisch erfüllt sein, also

$$[(-g)\,(G^{mn} + \varkappa t^{mn})]_{,n} = 0 \qquad (14,15)$$

für jede Metrik gelten. Gleichung (14,15) läßt sich am einfachsten erfüllen, wenn wir entsprechend

$$\begin{aligned} &(-g)\,(G^{mn} + \varkappa t^{mn}) = U^{mni}{}_{,i}\,, \\ &U^{mni} = -U^{min}, \qquad U^{mni}{}_{,i} = U^{nmi}{}_{,i} \end{aligned} \qquad (14,16)$$

ein Superpotential $U^{mni}$ einführen. Da auf der linken Seite von (14,16) in $G^{mn}$ zweite Ableitungen der Metrik auftreten, sollte $U^{mni}$ höchstens erste Ableitungen enthalten. Dies können wir dadurch sichern, daß wir $U^{mni}$ als Divergenz einer Größe $U^{mnik}$ schreiben,

$$U^{mni} = U^{mnik}{}_{,k}\,, \qquad (14,17)$$

die nur von der Metrik, aber nicht von deren Ableitungen abhängt. Durch die Symmetrieforderungen ist die Gestalt von $U^{mnik}$ bis auf einen Vorfaktor eindeutig bestimmt; wir treffen die Wahl

$$U^{mnik} = \tfrac{1}{2}\,(-g)\,(g^{mn}g^{ik} - g^{mi}g^{nk})\,. \qquad (14,18)$$

Während die Gültigkeit von (14,15) wegen unseres Konstruktionsverfahrens gesichert ist, müssen wir explizit prüfen, ob $t^{mn}$ keine zweiten Ableitungen der Metrik enthält. Aus der Gl. (14,16), d. h. aus

$$\varkappa(-g)\,t^{mn} = \tfrac{1}{2}\,[(-g)\,(g^{mn}g^{ik} - g^{mi}g^{nk})]_{,ik} - (-g)\,G^{mn}, \qquad (14,19)$$

erhält man nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} 2\varkappa(-g)\,t^{mn} = {} & \mathfrak{g}^{mn}{}_{,k}\mathfrak{g}^{ik}{}_{,i} - \mathfrak{g}^{mi}{}_{,i}\mathfrak{g}^{nk}{}_{,k} + \tfrac{1}{2}\,g^{mn}g_{li}\mathfrak{g}^{lk}{}_{,p}\mathfrak{g}^{pi}{}_{,k} \\ & - g_{ik}\mathfrak{g}^{ip}{}_{,l}(g^{ml}\mathfrak{g}^{nk}{}_{,p} + g^{nl}\mathfrak{g}^{mk}{}_{,p}) + g_{li}g^{kp}\mathfrak{g}^{nl}{}_{,k}\mathfrak{g}^{mi}{}_{,p} \\ & + \tfrac{1}{8}\,(2g^{ml}g^{nk} - g^{mn}g^{lk})\,(2g_{ip}g_{qr} - g_{pq}g_{ir})\,\mathfrak{g}^{ir}{}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,k} \end{aligned} \qquad (14,20)$$

mit der Abkürzung

$$\mathfrak{g}^{mn} \equiv \sqrt{-g}\,g^{mn}. \qquad (14,21)$$

Der Energieimpulskomplex $t^{mn}$ hat also tatsächlich die gewünschten Eigenschaften. Daß es uns in so einfacher Weise gelang, die in $G^{mn}$ enthaltenen zweiten Ableitungen der Metrik durch die Ableitungen von $U^{mnik}$ auszudrücken, hängt eng mit der in (9,45) angegebenen Möglichkeit der Aufspaltung der Lagrange-Funktion des Gravitationsfeldes zusammen.

*Die Eigenschaften des Energieimpulskomplexes.* Der Energieimpulskomplex $t^{mn}$ ist kein Tensor; am eindrucksvollsten merkt man diese Eigenschaft daran, daß man in jedem Punkt der Raum-Zeit durch Einführung lokal geodätischer Koordinaten $g_{nm} = \eta_{nm}$, $g_{nm,a} = 0$ den Energieimpulskomplex zum Verschwinden bringen kann. Wenn also unser Konzept, dem reinen Gravitationsfeld Energie und Impuls zuzuordnen, überhaupt sinnvoll ist, ist die Gravitationsenergie auf keinen Fall lokalisierbar; sie ist bestenfalls eine Größe, die man einem ganzen Raumgebiet zuordnen kann, ihr Wert in einem Punkt ist beliebig durch Wahl des Koordinatensystems veränderbar.

Der Energieimpulskomplex transformiert sich hingegen wie ein Tensor bei Koordinatentransformationen von der formalen Struktur einer Lorentz-Transformation:

$$x^{n'} = L^{n'}_{n} x^n, \qquad L^{n'}_{n} L^{a}_{n'} = \delta^a_n, \qquad t^{n'm'} = L^{n'}_{n} L^{m'}_{m} t^{nm}. \tag{14,22}$$

Diese Eigenschaft ist wichtig bei der Verwendung des Energieimpulskomplexes für das Fernfeld einer inselartigen Materieverteilung, in dem der Raum nur schwach von einem Minkowski-Raum abweicht und daher Lorentz-Transformationen eine physikalische Bedeutung haben.

## 14.3. Die Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls

Wir wollen jetzt den Energieimpulskomplex bzw. das Superpotential benutzen, um aus den lokalen Bilanzgleichungen für den Viererimpuls

$$[\varkappa(-g)\,(T^{mn} + t^{mn})]_{,n} = U^{mni}{}_{,in} = U^{mnik}{}_{,kin} = 0 \tag{14,23}$$

und den aus ihnen folgenden Bilanzgleichungen für den Drehimpuls

$$\{[\varkappa(-g)\,(T^{mn} + t^{mn})]\,x^a - [\varkappa(-g)\,(T^{ma} + t^{ma})]\,x^n\}_{,m} = (U^{mni}{}_{,i}\,x^a - U^{mai}{}_{,i}x^n)_{,m} = 0 \tag{14,24}$$

globale Aussagen über Energie, Impuls und Drehimpuls des betrachteten Systems zu gewinnen.

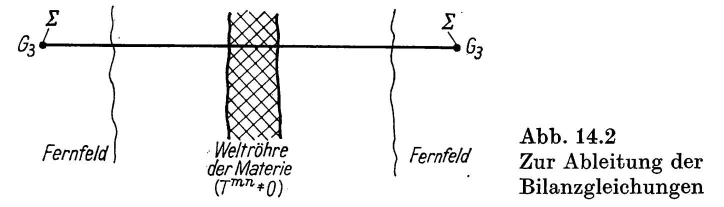



Abb. 14.2
Zur Ableitung der Bilanzgleichungen

Dazu integrieren wir (14,23) und (14,24) über das in Abb. 14.2 eingezeichnete Gebiet $G_3$ des dreidimensionalen Raumes $x^4 = \text{const}$, das die Materie enthält und bis in die Fernfeldzone reicht, und formen dieses Integral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral über die Oberfläche $\Sigma$ von $G_3$ um:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^4}\int\limits_{G_3} U^{m4i}{}_{,i}\,\mathrm{d}^3x = -\int\limits_{G_3} U^{m\nu i}{}_{,i\nu}\,\mathrm{d}^3x = -\int\limits_{\Sigma} U^{m\nu i}{}_{,i}\,\mathrm{d}f_\nu, \tag{14,25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^4}\int\limits_{G_3} (U^{4ni}{}_{,i}x^a - U^{4ai}{}_{,i}x^n)\,\mathrm{d}^3x = -\int\limits_{\Sigma} (U^{\nu ni}{}_{,i}x^a - U^{\nu ai}{}_{,i}x^n)\,\mathrm{d}f_\nu. \tag{14,26}$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften (14,16) enthält $U^{m4i}{}_{,i}$ keine Zeitableitung, so daß sich auch die linken Seiten dieser Gleichungen in Oberflächenintegrale umformen lassen. Bezeichnen wir diese Integrale mit

$$p^m \equiv \int_{G_3} [(-g)\,(T^{4m} + t^{4m})]\,\mathrm{d}^3x = \int_{\Sigma} U^{m4\nu}\,\mathrm{d}f_\nu, \tag{14,27}$$

$$\begin{aligned} I^{an} &\equiv \int_{G_3} [(-g)\,(T^{4n}x^a - T^{4a}x^n + t^{4n}x^a - t^{4a}x^n)]\,\mathrm{d}^3x \\ &= \int_{\Sigma} (U^{4n\nu}x^a - U^{4a\nu}x^n + U^{4na\nu} - U^{4an\nu})\,\mathrm{d}f_\nu \end{aligned} \tag{14,28}$$

und beachten, daß $T^{mn}$ auf $\Sigma$ verschwindet, erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p^m = -c\int_{\Sigma} U^{m\nu i}{}_{,i}\,\mathrm{d}f_\nu = -c\int_{\Sigma} (-g)\,t^{m\nu}\,\mathrm{d}f_\nu, \tag{14,29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,I^{an} = -c\int_{\Sigma} (U^{\nu ni}{}_{,i}x^a - U^{\nu ai}{}_{,i}x^n)\,\mathrm{d}f_\nu = -c\int_{\Sigma} (-g)\,(t^{\nu n}x^a - t^{\nu a}x^n)\,\mathrm{d}f_\nu. \tag{14,30}$$

Diese Gleichungen können wir als Bilanzgleichungen für Impuls $p^m$ und Drehimpuls $I^{an}$ interpretieren. Sie sagen aus, daß sich Impuls und Drehimpuls einer Quelle (des von $\Sigma$ begrenzten Gebietes) dadurch ändern, daß sie durch Gravitationsstrahlung über die Grenzfläche $\Sigma$ transportiert werden. Ihr besonderer Vorteil liegt darin, daß alle auftretenden Größen nur auf $\Sigma$, d. h. nur im Gebiet des Fernfeldes, bekannt zu sein brauchen.

Bei Anwendungen werden wir die Fläche $\Sigma$ mit einer „Kugel" $r = \text{const}$ identifizieren; da deren Flächenelement durch

$$\mathrm{d}f_\nu = x^\nu r \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi + O(r) \tag{14,31}$$

gegeben wird, müssen wir im Gebiet des Fernfeldes ($r$ sehr groß) nur solche Beiträge der Integranden berücksichtigen, die nicht stärker als $r^{-2}$ gegen Null gehen.

Testen wir den physikalischen Inhalt der Bilanzgleichungen am Beispiel der stationären Metrik (14,9), brauchen wir zur Berechnung des Impulses gemäß (14,27) nur die zu $r^{-1}$ proportionalen Terme der Metrik mitzunehmen (die für $U^{m4\nu}$ Terme in $r^{-2}$ geben), d. h., wir können die in der linearisierten Theorie gültige Beziehung

$$U^{mni} = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{g}^{mn}\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{g}^{mi}\mathfrak{g}^{nk})_{,k} = \tfrac{1}{2}\,(\eta^{nk}\bar{f}^{mi}{}_{,k} - \eta^{ik}\bar{f}^{mn}{}_{,k}) \tag{14,32}$$

benutzen. Das Ergebnis der einfachen Rechnung ist

$$p^\nu = 0, \qquad p^4 = 8M\pi/\varkappa = mc^2 = \text{const}, \tag{14,33}$$

d. h., der räumliche Impuls ist Null, und die Energie $p^4$ hängt mit der im Fernfeld gemessenen Masse $m$ genau nach der speziell-relativistischen Formel zusammen. Zum Drehimpuls $I^{an}$ hingegen geben nur die zu $r^{-2}$ proportionalen Terme von $g_{4\nu}$ einen Beitrag; man erhält

$$I^{4\nu} = 0, \qquad I^{\alpha\nu} = \frac{8\pi}{\varkappa}\,\varepsilon^{\alpha\nu\beta}P_\beta. \tag{14,34}$$

Die Ergebnisse (14,33) und (14,34) bestätigen also unsere Vorstellungen, insbesondere die Deutung von $p^m$ als Impuls und $I^{an}$ als Drehimpuls des Systems Materie plus Gravitationsfeld.

Bei zeitabhängigen Feldern werden Impuls und Drehimpuls nicht erhalten bleiben. Wir prüfen dies an der Energiebilanzgleichung des Fernfeldes (13,32) einer zeitabhängigen Quelle. Da der Energieimpulskomplex quadratisch in den ersten Ableitungen der Metrik ist [vgl. (14,20)], haben wir beim Energiesatz

$$\frac{\mathrm{d}p^4}{\mathrm{d}t} = -c \int (-g)\, t^{4\nu} x^\nu r \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \tag{14,35}$$

nur die Terme der Metrik (13,32) zu berücksichtigen, deren erste Ableitungen wie $r^{-1}$ gehen, nämlich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{44} &\approx \eta^{44} - \bar{f}^{44} \approx -1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}{c^2 r^3},\\
\mathfrak{g}^{4\nu} &\approx -\bar{f}^{4\nu} \approx \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\ddot{D}_{\nu\alpha}x^\alpha}{c^2 r^2}, \qquad D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right),\\
\mathfrak{g}^{\mu\nu} &\approx \eta^{\mu\nu} - \bar{f}^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\ddot{D}_{\nu\mu}}{c^2 r}.
\end{aligned} \tag{14,36}$$

Nach einer einfachen, etwas längeren Rechnung erhält man

$$\frac{\mathrm{d}p^4}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5c^2}\left(\dddot{D}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\eta_{\alpha\beta}\dddot{D}^\sigma_\sigma\right)\left(\dddot{D}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha\beta}\dddot{D}^\tau_\tau\right), \tag{14,37}$$

d. h., die Energie des Systems nimmt ständig ab. In den meisten Fällen, z. B. beim Planetensystem, kann dieser Energieverlust durch Gravitationsquadrupolstrahlung allerdings vernachlässigt werden, da er proportional zur sechsten Potenz der Frequenz $\omega$ des Systems ist.

Die Schwäche dieser Anwendung der Bilanzgleichungen erkennt man, wenn man nicht den Energieverlust, sondern die Gesamtenergie des Quadrupolwellen aussendenden Systems zu berechnen versucht: Die entsprechenden Integrale divergieren für $r \to \infty$, wenn das System ständig sendet (der ganze Raum mit Strahlung erfüllt ist). Dieses Divergieren der Gesamtenergie ist möglich, weil wir in der linearisierten Theorie die Rückwirkung der Strahlungsaussendung auf die Bewegung der Quellen vernachlässigt haben und somit das System ständig Energie abgeben kann, ohne sich zu erschöpfen. Natürlich wäre es wünschenswert, die Bilanzgleichungen am Fernfeld einer strengen Lösung zu testen. Leider ist jedoch keine einzige strenge Lösung bekannt, die die Ausstrahlung eines physikalisch vernünftigen Systems beschreibt.

### 14.4. Gibt es einen Energiesatz für das Gravitationsfeld?

Wegen der Bedeutung, die der Energieerhaltungssatz und — bei nicht abgeschlossenen Systemen — die Energiebilanzgleichung in vielen Gebieten der Physik haben, wollen wir auf ihre Rolle in der Gravitationstheorie noch einmal eingehen, wobei wir das in Abschnitt 14.3. Dargestellte zum Teil wiederholen.

In der Speziellen Relativitätstheorie, der Elektrodynamik, Thermodynamik, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie ist es immer so, daß sich für ein System eine Größe Energie definieren läßt, die konstant ist, wenn das System isoliert ist, und für die eine Bilanzgleichung aufgeschrieben werden kann, wenn das System in Wechselwirkung mit seiner Umgebung steht, und zwar so, daß die Energie des Gesamtsystems (System plus Umgebung) wieder konstant ist.

Man würde in Analogie dazu auch erwarten, daß sich z. B. elektrische Energie und Energie des Gravitationsfeldes zwar ineinander umwandeln können, ihre Summe aber konstant ist (wenn andere Wechselwirkungsarten fehlen). Die Einsteinsche Gravitationstheorie gibt jedoch eine vollkommen andere Antwort. In einem *allgemeinen* Gravitationsfeld gibt es zwar in der Umgebung jedes Punktes bei Einführung des dortigen Inertialsystems (lokal geodätischen Systems) einen Erhaltungssatz

$$T^{mn}{}_{,n} = 0$$

für Energie und Impuls der felderzeugenden Materie, er gilt aber nur so lange (in so kleinen Raumbereichen), wie man die Krümmung des Raumes, d. h. die eigentlichen Gravitationswirkungen, vernachlässigen kann. In diesem Sinn und mit dieser Einschränkung bestätigt die Gravitationstheorie die Erhaltungssätze der speziell-relativistischen Physik.

Für größere Raumbereiche, bei wirklicher Einbeziehung des Gravitationsfeldes, gibt es keine Energiebilanzgleichung. Es ist nicht korrekt, dies als Verletzung der Energieerhaltung anzusehen: Es existiert überhaupt keine kovariante Größe Energie, der man die Eigenschaft Erhaltung oder Nichterhaltung zuordnen kann. Damit ist keine der Grundlagen der Physik zerstört; die Energie ist nur eine sehr wichtige Hilfsgröße zur Beschreibung von Wechselwirkung, die Wechselwirkung aller Teile der Welt ist aber gerade wesentlich für die Gravitationstheorie.

Etwas günstiger ist die Lage, wenn das Gravitationsfeld nicht allgemein ist, sondern zusätzliche Eigenschaften besitzt. So kann man einem System, das vom Rest der Welt durch eine Fernfeldzone im Sinn von Abschnitt 14.1. getrennt ist und für das die Integrale (14,27) existieren, Energie und Impuls zuordnen. Im Unterschied zu einem allgemeinen System, für das z. B. das Superpotential auch existiert, haben diese Integrale durch die Verwendung von Minkowski-Koordinaten eine invariante Bedeutung. Es lassen sich dann Bilanzgleichungen formulieren, die aber bei realen Systemen, deren Fernfeld ja nicht bis ins Unendliche reicht, nur Näherungscharakter besitzen. Eine Lokalisierung der Energie im Inneren des Systems ist jedoch prinzipiell unmöglich.

Eine andere wichtige Möglichkeit der Anwendung der Begriffe Energie, Impuls oder Drehimpuls bietet sich, wenn das Gravitationsfeld Symmetrien besitzt. Während das lokale Inertialsystem gegen die volle Lorentz-Gruppe invariant ist und möglichen Translationen (Rotationen) genau die Energie-Impuls- (Drehimpuls-) Erhaltungssätze der üblichen Physik entsprechen, hat die ganze Raum-Zeit nur in Ausnahmefällen Symmetrieeigenschaften. Sind jedoch Symmetrien vorhanden, entsprechen ihnen immer auch Erhaltungssätze. Wir werden auf dieses Problem in Kapitel 19. zurückkommen.

*Literatur zu Kapitel 14.:*

[9], [12], [15], [103], [104], [138], [173], [174], [185], [200].

# 15. Gravitationswellen

## 15.1. Gibt es überhaupt Gravitationswellen?

Die Existenz von Gravitationswellen war lange Zeit umstritten, in den letzten Jahren ist jedoch ein Anwachsen der bejahenden Stimmen zu verzeichnen. Wie oft in der Geschichte einer Wissenschaft ist die Ursache von Meinungsverschiedenheiten in einer Mischung aus Unwissen und unexakten Definitionen zu suchen. So wird wahrscheinlich auch in der Gravitationstheorie der Streit erst dann vollkommen beigelegt sein, wenn eine exakte Lösung, z. B. des Zweikörperproblems, vorliegt, an der man ablesen kann, in welchem Sinne ein solches Doppelsternsystem Wellen aussendet und in welchem nicht, und wenn diese Wellen experimentell nachgewiesen wurden.

Wellen im allgemeinsten Sinn sind zeitabhängige Lösungen der Einsteinschen Gleichungen; solche Lösungen existieren natürlich. Diese Definition von Wellen ist aber nach unserer Erfahrung mit der Maxwell-Theorie etwas zu weit gefaßt, denn ein Feld, das sich nur infolge der Relativbewegung Quelle—Beobachter ändert (Vorbeiziehen eines statischen Feldes), möchten wir nicht als Welle bezeichnen. Fast alle anderen, zusätzlichen Anforderungen, die eine Gravitationswelle erfüllen sollte, führen aber auf die Kennzeichnung „Abstrahlung oder Transport von Energie", und hier beginnen die Schwierigkeiten, wie im vorhergehenden Kapitel erläutert, schon bei der Definition der Energie.

Um trotz der Nichtlinearität der Feldgleichungen relativ übersichtliche Verhältnisse zu haben, kann man sich auf solche Lösungen beschränken, die eine Fernfeldzone im Sinne von Abschnitt 14.1. besitzen. Man stelle sich also das Planetensystem vor, das man aus großer Entfernung betrachtet. Sendet dieses System infolge der Bewegung der Sonne und der Planeten Gravitationswellen aus? Die linearisierte Gravitationstheorie bejaht diese Frage, vernachlässigt allerdings die Rückwirkung der Ausstrahlung auf die Bewegung der Körper. Die allgemeine Meinung der Physiker ist aber, daß ein solches System einem Ausgleich zustrebt (die Sonne die Planeten einfängt, die ihre kinetische Energie durch Ausstrahlung verloren haben) und dabei Wellen aussendet. Gegen diese Vermutung läßt sich wenig sagen, wenn man sich das Planetensystem in einem sonst leeren Raum vorstellt. Denkt man jedoch an eine strenge Lösung, die das Planetensystem und den Rest der Welt (der Rest ist der eigentliche Kosmos!) umfaßt, dann müßte der Prozeß so aussehen (vgl. Abb. 15.1):

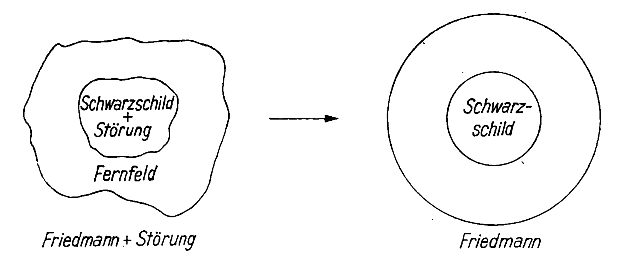



Abb. 15.1
Ausgleich eines gestörten gravitativen Systems

Aus einem anfangs nicht kugelsymmetrischen Feld im Innern der Fernfeldzone und der (infolgedessen) auch nicht kugelsymmetrischen Außenwelt entwickeln sich innen eine Schwarzschild-Lösung und außen ein Friedman-Kosmos (vgl. Kapitel 26).; beide Teile der Welt streben einem Ausgleich zu. Ob und in welcher Richtung dabei ein Energietransport durch die Fernfeldzone erfolgt, ist unklar — keiner der beiden Partner ist bei der Wechselwirkung prinzipiell bevorzugt. Es ist also durchaus nicht sicher, ob ein frei gravitierendes System (System mit ausschließlich gravitativer Wechselwirkung) Gravitationswellen aussendet.

Klarer sind die Verhältnisse, wenn die Eigenschaften (die Massenverteilung) eines Systems durch einen Eingriff von außen, d. h. durch nichtgravitative Wechselwirkung, in unstetiger Weise geändert werden, z. B. durch die Explosion einer Bombe. Die dadurch hervorgerufene Änderung des Gravitationsfeldes breitet sich in Gestalt von gravitativen Stoßwellen aus, für jeden Beobachter in seinem lokalen Inertialsystem mit Lichtgeschwindigkeit. Wir werden hierauf bei der Diskussion des charakteristischen Cauchy-Problems in Abschnitt 16.5. noch einmal eingehen.

Einen Experimentalphysiker werden nicht so sehr diese theoretischen Diskussionen von Definitionen interessieren, sondern die Fragen, ob und wie man Gravitationswellen erzeugen und nachweisen kann. Wegen der Kleinheit der Gravitationskonstanten erscheint es zur Zeit aussichtslos, durch erzwungene Bewegung von Massen Gravitationswellen meßbarer Stärke zu erzeugen. Die Frage reduziert sich also darauf, ob in unserer Umwelt Sterne, Sternsysteme oder andere Objekte Gravitationswellen aussenden und mit welchen experimentellen Anordnungen man diese Wellen nachweisen könnte. In Abschnitt 15.4. gehen wir kurz auf dieses Problem ein.

Strenge, die Wechselwirkung zwischen der Bewegung der Quellen und der Aussendung von Wellen beschreibende Lösungen sind nicht bekannt. Bei den Überlegungen der folgenden Seiten geht es daher fast immer um eine Analyse der lokalen Eigenschaften eventuell existierender Lösungen: Man führt im Fernfeld oder in der Umgebung eines Punktes ein lokales Inertialsystem ein und fragt nach solchen durch die Raumkrümmung verursachten (kleinen) Abweichungen von der Minkowski-Raummetrik, die wellenartigen Charakter haben. Auch wenn wir in Abschnitt 15.3. strenge Lösungen diskutieren, handelt es sich dabei eigentlich um eine unzulässige Idealisierung und Verallgemeinerung lokaler Eigenschaften von Gravitationsfeldern, ähnlich wie bei den streng ebenen, monochromatischen elektromagnetischen Wellen in der Maxwell-Theorie, die ja auch nur näherungsweise (lokal) realisiert werden können.

## 15.2. Die ebenen Gravitationswellen der linearisierten Theorie

*Die Welle und ihre Freiheitsgrade.* Die einfachsten Lösungen der linearisierten Feldgleichungen im materiefreien Raum

$$\begin{aligned} \Box \bar{f}_{mn} &= \eta^{ab}\bar{f}_{mn,ab} = 0, & \bar{f}^{mn}{}_{,n} &= 0, \\ g_{mn} &= \eta_{mn} + f_{mn}, & \bar{f}_{mn} &= f_{mn} - \tfrac{1}{2}\eta_{mn}f^{a}{}_{a} \end{aligned} \tag{15,1}$$

sind die ebenen, monochromatischen Gravitationswellen

$$\bar{f}_{mn} = \hat{a}_{nm}\, e^{ik_r x^r}, \qquad \hat{a}_{nm} = \text{const}, \qquad k_r k^r = 0, \qquad \hat{a}_{nm}k^m = 0, \tag{15,2}$$

aus denen sich (im Sinne einer Fourier-Analyse) alle Lösungen von (15,1) durch Überlagerung gewinnen lassen (in diesem Abschnitt werden Indizes wieder mit der Flachraummetrik $\eta_{nm}$ bewegt).

Die wegen der Symmetrie 10 unabhängigen Komponenten $\hat{a}_{nm}$ werden durch die 4 Nebenbedingungen $\hat{a}_{nm}k^m = 0$ eingeschränkt. Man könnte also vermuten, daß eine ebene monochromatische Gravitationswelle 6 Freiheitsgrade (verallgemeinerte Polarisationsfreiheitsgrade) hat. In den Wellen (15,2) sind aber noch reine Koordinatenwellen enthalten; dies sind Wellen, deren Krümmungstensor identisch verschwindet, so daß sie durch Koordinatentransformationen beseitigt werden können. Es ist deshalb für viele Rechnungen zweckmäßig, diese physikalisch bedeutungslosen Freiheitsgrade zu eliminieren. Wir haben dazu die Koordinatentransformationen (13,9) zur Verfügung, deren erzeugende Funktionen

$$b^n(x^m) = -\mathrm{i}\,\hat{b}^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m} \qquad (15,3)$$

der Wellengleichung

$$\Box\, b^n = 0 \qquad (15,4)$$

genügen und die eine Umeichung

$$a_{nm} = \hat{a}_{nm} - \hat{b}_n k_m - \hat{b}_m k_n + \eta_{nm}\hat{b}_r k^r \qquad (15,5)$$

bewirken. Die vier Konstanten $\hat{b}_n$ kann man nun so wählen, daß zusätzlich zu (15,2)

$$a_{4m} = 0 = a_{n4} \qquad (15,6)$$

(wegen $a_{mn}k^n = 0$ sind dies drei zusätzliche Bedingungen) und

$$a^{\mu}_{\mu} = 0 = a_m{}^m \qquad (15,7)$$

erfüllt sind. Die jetzt noch verbleibenden 2 unabhängigen Komponenten von $a_{nm}$ sind nicht mehr wegtransformierbar, haben also eine echte physikalische Bedeutung.

Die Bedingungen (15,2) und (15,6) bis (15,7) lassen sich leicht anschaulich interpretieren. Wir wählen dazu das räumliche Koordinatensystem so, daß die Welle sich in $z$-Richtung ausbreitet, d. h. $k^r$ nur die Komponenten

$$k^r = (0, 0, \omega/c, \omega/c) \qquad (15,8)$$

hat. Von der Matrix $a_{nm}$ der Amplituden sind dann wegen (15,2) (15,6) und (15,7) nur $a_{xx}$, $a_{xy}$ und $a_{yy}$ von Null verschieden, und es gilt zusätzlich $a_{xx} = -a_{yy}$. Die Gravitationswelle ist also transversal, und entsprechend den zwei Freiheitsgraden der Welle gibt es zwei linear unabhängige Polarisationszustände, die man bei Gültigkeit von (15,8) z. B. durch

$$a_{xx} = -a_{yy}, \qquad a_{nm} = 0 \quad \text{sonst} \qquad (15,9)$$

und

$$a_{xy} = a_{yx}, \qquad a_{nm} = 0 \quad \text{sonst} \qquad (15,10)$$

realisieren kann („lineare Polarisation“).

Das Ergebnis dieser Analyse lautet also: Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus ($k^r$ ist ein Nullvektor). Sie sind transversal und besitzen zwei

Freiheitsgrade der Polarisation. In den durch (15,8) ausgezeichneten Koordinaten haben sie die Metrik

$$\begin{gathered} ds^2 = (1 + f_{xx})\, dx^2 + 2f_{xy}\, dx\, dy + (1 - f_{xx})\, dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2, \\ f_{xx} = a_{xx} \cos\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t + \varphi\right), \qquad f_{xy} = a_{xy} \cos\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t + \psi\right) \end{gathered} \qquad (15,11)$$

(man denke sich von jetzt an immer die Realteile der komplexen Größen $f_{nm}$ genommen).

*Der Krümmungstensor der ebenen Gravitationswelle.* Unabhängig von einer speziellen Eichung hat der Krümmungstensor

$$R_{ambn} = \tfrac{1}{2} (f_{an,mb} + f_{mb,an} - f_{mn,ba} - f_{ab,mn}) \qquad (15,12)$$

einer ebenen Gravitationswelle wegen der aus (15,1) und (15,2) folgenden Beziehungen

$$f_{mn} k^n = \tfrac{1}{2} k_m f^a_a, \qquad f_{mn,ab} = -k_a k_b f_{mn} \qquad (15,13)$$

die Eigenschaft

$$R_{ambn} k^n = 0. \qquad (15,14)$$

Der die Welle charakterisierende Nullvektor $k^n$ ist Eigenvektor des Krümmungstensors.

In der speziellen Eichung der Metrik (15,11) lassen sich alle nichtverschwindenden Komponenten des Krümmungstensors durch

$$R_{\alpha 4 \beta 4} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 f_{\alpha\beta}}{c^2 dt^2} \qquad (15,15)$$

ausdrücken.

*Die Bewegung von Testteilchen in einer ebenen monochromatischen Gravitationswelle.* Schreibt man die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{nm} \frac{dx^n}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} = 0 \qquad (15,16)$$

eines Testteilchens im Koordinatensystem (15,11) auf, dann stellt man fest, daß wegen

$$\Gamma^a_{44} = \tfrac{1}{2} \eta^{ab} (2 f_{b4,4} - f_{44,b}) = 0 \qquad (15,17)$$

auch

$$x^\alpha = \text{const}, \qquad x^4 = c\tau \qquad (15,18)$$

eine Lösung der Geodätengleichung ist. Teilchen, die anfangs ruhen, bleiben immer am gleichen Ort; sie werden anscheinend von der Gravitationswelle überhaupt nicht beeinflußt. Dieses zunächst überraschende Ergebnis wird aber verständlich, wenn wir uns daran erinnern, daß die Krümmung des Raumes in die Relativbeschleunigung zweier Testteilchen eingeht, die Wirkung von Gravitationswellen also an dieser Relativbeschleunigung (und nicht an den relativen Lagen) feststellbar sein sollte.

Welche Beschleunigung mißt nun ein im Nullpunkt $(O, ct)$ des räumlichen Koordinatensystems ruhender Beobachter, der ein im Punkt $(x^\alpha, ct)$ ruhendes Teilchen

beobachtet? Bei der Interpretation seiner Messungen wird der Beobachter nicht das Koordinatensystem (15,11), sondern sein lokales mitgeführtes Inertialsystem

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta - c^2\, dt^2 + \text{höhere Glieder} \tag{15,19}$$

benutzen, das aus (15,11) durch die Transformation

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \tfrac{1}{2} f^\alpha{}_\beta(O, ct)\, x^\beta \tag{15,20}$$

hervorgeht. In diesem Inertialsystem hat das Testteilchen den zeitlich veränderlichen Ort $\bar{x}^\alpha$, und seine Beschleunigung ist

$$\frac{d^2\bar{x}^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 f^\alpha{}_\beta(O, ct)}{dt^2}\, x^\beta = -c^2 R^\alpha{}_{4\beta 4} x^\beta \tag{15,21}$$

[vgl. (15,15)].

Da $f_{\alpha\beta}$ nur Komponenten in der $x,y$-Ebene hat, werden Testteilchen auch nur in dieser zur Ausbreitungsrichtung der Welle senkrechten Ebene relativ zueinander beschleunigt; auch in diesem physikalischen Sinn ist die Gravitationswelle transversal. Abb. 15.2 zeigt die periodische Bewegung eines Kreises von Testteilchen unter dem Einfluß der linear polarisierten Welle (15,9).

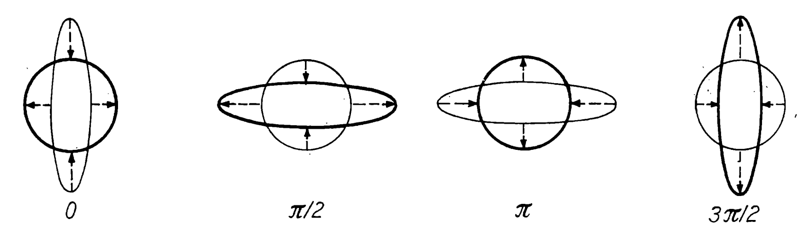



Abb. 15.2
Bewegung eines Kreises von Testteilchen in einer Gravitationswelle

*Der Energieimpulskomplex der ebenen Welle.* Der Energieimpulskomplex (14,20) hat im Fall der ebenen Welle die einfache Gestalt

$$t^{mn} = \frac{\omega^2}{4}\, a_{ir}\bar{a}^{ir} k^m k^n \sin^2 k_s x^s. \tag{15,22}$$

Typisch für eine ebene Welle ist ihre Proportionalität zu $k^m k^n$, die wir auch bei den elektromagnetischen Wellen (8,45) finden und die zum Ausdruck bringt, daß die gesamte Energie mit Lichtgeschwindigkeit strömt und kein statischer Anteil vorhanden ist.

## 15.3. Ebene Wellen als strenge Lösungen der Einsteinschen Gleichungen

Kann man strenge Lösungen der Einsteinschen Gleichungen gewinnen, die ähnliche Eigenschaften haben wie die ebenen Wellen der linearisierten Theorie? Ehe man diese Frage beantworten kann, muß man in kovarianter Weise die gesuchten Lösungen charakterisieren und damit festlegen, in welchem Sinn man verallgemeinern will.

Überprüft man die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts, dann wird man feststellen, daß nur (15,14) eine kovariante Aussage ist. Man könnte also versuchen, von ihr auszugehen und ebene Wellen durch

$$R_{mn} = 0, \qquad R_{ambn}k^n = 0, \qquad k_n k^n = 0 \tag{15,23}$$

zu charakterisieren. Es zeigt sich aber, daß nur die schärfere Forderung

$$R_{mn} = 0, \qquad k_{a;n} = 0, \qquad k_n k^n = 0 \tag{15,24}$$

der Beschränkung auf ebene Wellen entspricht (man überzeuge sich, daß (15,23) aus (15,24) folgt!). Die Forderung $k_{a;n} = 0$ verallgemeinert die im flachen Raum vorhandene Eigenschaft ebener Wellen, parallele Strahlen zu besitzen, denen ein konstanter Nullvektor $k^n$ zugeordnet ist. Man nennt diese Wellen deshalb *ebenfrontige Wellen mit parallelen Strahlen.*

Der allgemeineren Lösungsklasse (15,23) werden wir in Kapitel 18. wieder begegnen.

*Wahl eines geeigneten Koordinatensystems.* Da $k_{[a;b]} = 0$ gilt, läßt sich der Nullvektor $k_a$ als Gradient einer Funktion $u$ schreiben. Indentifizieren wir $u$ mit der Koordinate $x^4$, dann gilt

$$k_a = u_{,a}, \qquad u = x^4, \qquad k_a = (0, 0, 0, 1). \tag{15,25}$$

Für eine ebene Welle im flachen Raum, die sich in $z$-Richtung ausbreitet, ist $u$ proportional zu $ct - z$. Da $k_a$ ein Nullvektor ist, verschwindet $g^{44}$, und durch Koordinatentransformationen $x^{\alpha'}(x^\alpha)$, $u' = u$ kann man

$$g^{14} = g^{24} = g^{44} = 0, \qquad g^{34} = 1 \tag{15,26}$$

bzw. wegen $g^{4a}g_{am} = \delta^4_m$

$$g_{31} = g_{32} = g_{33} = 0, \qquad g_{34} = 1 \tag{15,27}$$

erreichen. Der Leser möge sich bei diesen und den folgenden Transformationen davon überzeugen, daß diese Transformationen wirklich existieren (Existenzsätze von Lösungen partieller Differentialgleichungen) und die vorher schon erreichte Form der Metrik nicht wieder zerstören.

Das Nullvektorfeld $k_a$ ist kovariant konstant, und mit (15,25) bis (15,27) folgt deshalb

$$k_{a;n} = \Gamma^m_{an} k_m = -\tfrac{1}{2}\, g_{an,3} = 0. \tag{15,28}$$

Bezeichnen wir die Koordinaten mit $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = v$, $x^4 = u$ und führen in dem zweidimensionalen $x,y$-Unterraum konform euklidische Koordinaten ein (was auf einer Fläche immer möglich ist), gelangen wir zu der Metrik

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & p^2(x, y, u)\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + 2m_1(x, y, u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2m_2(x, y, u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\ & + 2m_4(x, y, u)\,\mathrm{d}u^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 & m_1 \\ 0 & p^2 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 & 2m_4 \end{pmatrix},$$

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} p^{-2} & 0 & -m_1 p^{-2} & 0 \\ 0 & p^{-2} & -m_2 p^{-2} & 0 \\ -m_1 p^{-2} & -m_2 p^{-2} & -2m_4 + \dfrac{m_1^2 + m_2^2}{p^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15,29}$$

*Auswertung der Feldgleichungen.* Wegen

$$k_{m;b;n} - k_{m;n;b} = 0 = R^a{}_{mbn} k_a \tag{15,30}$$

verschwinden die Komponenten $R^4{}_{mbn}$ bzw. $R_{3mbn}$ des Krümmungstensors identisch, so daß sich die Feldgleichungen auf die fünf Gleichungen

$$R_{mn} = R^1{}_{m1n} + R^2{}_{m2n} = 0 \tag{15,31}$$

reduzieren.

Bei Einsetzen von

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = (\ln p)_{,2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = (\ln p)_{,1}, \\ &\Gamma^4_{3B} = 0, \qquad \Gamma^4_{AB} = 0, \qquad A, B = 1,2 \end{aligned} \tag{15,32}$$

in die Definitionsgleichung

$$R^a{}_{mbn} = \Gamma^a_{mn,b} - \Gamma^a_{mb,n} + \Gamma^a_{rn}\Gamma^r_{mb} - \Gamma^a_{rb}\Gamma^r_{mn} \tag{15,33}$$

des Krümmungstensors ergibt sich, daß $R_{11} = 0$ und $R_{22} = 0$ gleichwertig zu

$$\Delta(\ln p) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln p = 0 \tag{15,34}$$

sind. $\ln p$ ist also der Realteil einer analytischen Funktion von $x + iy$, so daß durch eine Konformationsformation der $x,y$-Ebene

$$p = 1, \qquad \Gamma^4_{BC} = 0, \qquad A, B = 1, 2 \tag{15,35}$$

erreicht werden kann.

Berechnen wir jetzt unter Benutzung von (15,35) und

$$\Gamma^a_{3b} = 0, \qquad \Gamma^2_{14} = \tfrac{1}{2}(m_{2,1} - m_{1,2}) = -\Gamma^1_{24} \tag{15,36}$$

die Komponenten $R^1{}_{412}$ und $R^2{}_{421}$, dann sehen wir, daß aus den Feldgleichungen $R_{14} = R_{24} = 0$ die Beziehung

$$m_{1,2} - m_{2,1} = F'(u) \tag{15,37}$$

folgt, die es uns ermöglicht, mit Hilfe der Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} &v = \bar{v} - \int m_1 \, dx + \tfrac{1}{2} F'(u)\, xy, \\ &\bar{u} = F(u), \qquad \bar{\bar{v}} = \bar{v} F'^{-1}(u), \\ &\bar{x} = x \cos u + y \sin u, \qquad \bar{y} = -x \sin u + y \cos u \end{aligned} \tag{15,38}$$

die vereinfachte Form

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\, du\, dv + H(x, y, u)\, du^2 \tag{15,39}$$

der Metrik einzuführen (die Querstriche an den Koordinaten wurden wieder weggelassen). Die restliche noch zu befriedigende Feldgleichung $R_{44} = 0$ lautet dann

$$\Delta H = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H(x, y, u) = 0. \tag{15,40}$$

Metriken (15,39), die diese Beziehung erfüllen, sind die allgemeinsten ebenfrontigen Wellen mit parallelen Strahlen.

*Eigenschaften der ebenfrontigen Wellen mit parallelen Strahlen.* In den Koordinaten

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - ct), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + ct) \tag{15,41}$$

hat der flache Raum das Linienelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,du\,dv. \tag{15,42}$$

Vergleicht man diese Darstellung mit der Gravitationswelle (15,39), dann sieht man, daß die Welle auch in dem anschaulichen Sinn eben ist, daß die charakteristische Funktion $H$ von der Zeit nur in der Kombination $z - ct$ abhängt.

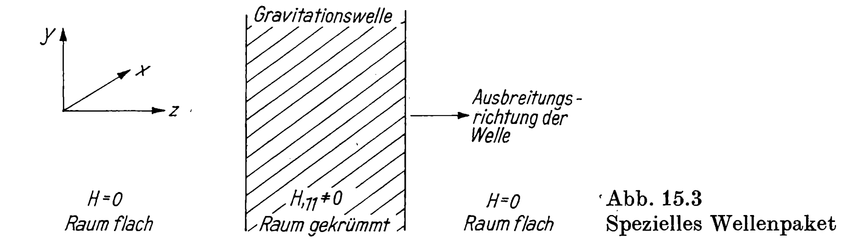



Abb. 15.3
Spezielles Wellenpaket

In der allgemeinen Lösungsmannigfaltigkeit (15,39) sind auch spezielle Wellenpakete enthalten, die so beschaffen sind, daß der Raum vor und nach dem Durchgang der Welle flach ist (vgl. Abb. 15.3).

Da es keine in der ganzen $x,y$-Ebene reguläre Potentialfunktion gibt, besitzt $H$ immer Singularitäten (die einzige Ausnahme $H = H(u)$ führt auf einen flachen vierdimensionalen Raum). Zur Vermeidung solcher Singularitäten ist es in manchen Fällen zweckmäßig, ein anderes Koordinatensystem zu benutzen. Bei der einfachsten Form

$$H = (x^2 - y^2)\,h(u) \tag{15,43}$$

einer Welle führt z. B. die Koordinatentransformation

$$x = \bar{x}a(u), \qquad y = \bar{y}b(u), \qquad v = \bar{v} - \tfrac{1}{2}\,a'a\bar{x}^2 - \tfrac{1}{2}\,bb'\bar{y}^2, \\ h(u) = a''/a = -b''/b \tag{15,44}$$

zum Linienelement (die Querstriche an den Koordinaten wurden nach der Transformation wieder weggelassen)

$$ds^2 = a^2(u)\,dx^2 + b^2(u)\,dy^2 + 2\,du\,dv, \\ a''b + ab'' = 0 \tag{15,45}$$

mit einer in der ganzen $x$-$y$-Ebene regulären Metrik.

Zum Schluß dieser Diskussion wollen wir die exakte Lösung noch mit den ebenen Wellen der linearisierten Theorie vergleichen. Gehen wir die Rechnungen zur Ableitung der Metrik (15,39) der exakten Lösung noch einmal durch oder setzen diese Metrik unmittelbar in die Feldgleichungen ein, dann können wir überraschenderweise feststellen, daß keinerlei quadratische Ausdrücke in $H$ oder seinen Ableitungen vorkommen. Die strenge Lösung (15,39) ist also eine Lösung auch der linearisierten Feldgleichungen, sie erfüllt sogar die Eichbedingungen $\left(\sqrt{-g}\, g^{mn}\right)_{,n} = 0$, aber natürlich nicht immer die Forderung $|H| \ll 1$. Wenn wir strenge Lösung und Näherungslösung im einzelnen vergleichen wollen, müssen wir die strenge Lösung linearisieren; im Fall der Lösung (15,45) kann man das dadurch machen, daß man die Substitution

$$a = 1 + \alpha/2, \qquad b = 1 - \beta/2, \qquad \alpha \ll 1, \qquad \beta \ll 1 \tag{15,46}$$

durchführt und höhere Terme in $\alpha$ und $\beta$ vernachlässigt. Da wegen (15,45) $\alpha'' = -\beta''$, also $\alpha = -\beta + c_1 u + c_2$ gilt, $c_1$ aber Null sein muß (die Koordinate $u$ kann beliebig groß werden!) und $c_2$ durch eine Koordinatentransformation beseitigt werden kann, ist

$$\mathrm{d}s^2 = [1 + \alpha(u)]\, \mathrm{d}x^2 + [1 - \alpha(u)]\, \mathrm{d}y^2 + 2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{15,47}$$

die linearisierte Form von (15,43) bzw. (15,45). Wie der Vergleich mit (15,9) bis (15,11) zeigt, handelt es sich um ein linear polarisiertes Paket ebener Wellen verschiedener Frequenz.

## 15.4. Experimenteller Nachweis von Gravitationswellen

Die durch Gravitationswellen verursachte Veränderung der Raumkrümmung kann im Prinzip dadurch festgestellt werden, daß sich Teilchenbahnen oder Schwingungszustände mechanischer oder elektromagnetischer Systeme ändern. Bisher ist ein experimenteller Nachweis jedoch noch nicht gelungen.

Gravitationswellen nachweisbarer Stärke entstehen sicher nur dann, wenn große Massen schnell bewegt (beschleunigt) werden. Mögliche derartige Prozesse sind z. B. der Gravitationskollaps (vgl. Kapitel 23.) oder der Supernovaausbruch eines Sterns unserer Galaxis oder auch ein schnell rotierendes Doppelsternsystem. Über die Intensität der dabei entstehenden Gravitationswellen gibt es nur sehr grobe Abschätzungen; sie besagen, daß auf der Erde die relative Abstandsänderung $h$ zweier Teilchen infolge solcher Gravitationswellen bestenfalls $10^{-17}$ beträgt (im Frequenzbereich $1-10^3$ Hz), wahrscheinlich aber nur $10^{-21}$.

Der erste Versuchsaufbau zum Nachweis von Gravitationswellen war der von J. Weber (1961); als Antenne diente ein 153 cm langer Aluminiumzylinder (Durchmesser 66 cm). Gravitationswellen, die senkrecht auf den Zylindermantel treffen, würden ihn zu Längsschwingungen anregen. Zunächst schienen einige „Ereignisse" nachgewiesen worden zu sein, jedoch konnte dies später selbst mit verfeinerter Meß- und Auswertetechnik (Benutzung von Saphir-Einkristallen, Arbeiten bei Temperaturen von 2 K) nicht bestätigt werden. Zur Zeit kann man Werte von $h \approx 10^{-18}$ erreichen, d. h. absolute Längenänderungen von etwa $10^{-16}$ cm (ein Tausendstel eines Atomkerndurchmessers).

Ein anderer Typ von Gravitationswellendetektoren sind Laser-Interferometer, bei denen die Abstandsänderungen zweier (oder mehrerer) Spiegel gemessen werden. Die Empfindlichkeit der Stab-Detektoren wurde hier (1985) ebenfalls erreicht.

Im Prinzip sollte es auch möglich sein, den Einfluß von Gravitationswellen auf die Bewegung von Satelliten oder Planeten festzustellen und dadurch insbesondere niederfrequente Wellen zu messen oder auf ihre Nichtexistenz zu schließen.

Ein indirekter Nachweis der Existenz von Gravitationswellen scheint durch die genaue Beobachtung des Pulsars PSR 1913 + 16 (vgl. Abschnitt 10.7.) gelungen zu sein. Dieses Doppelsternsystem sollte infolge des sehr schnellen Umlaufs eine merkliche Gravitations-Quadrupolstrahlung aussenden, demzufolge Energie verlieren und schneller rotieren. Die beobachtete Periodenänderung von $(2 \pm 0{,}22) \cdot 10^{-12}$ stimmt recht gut mit der zu $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ berechneten überein.

*Literatur zu Kapitel 15.:*

[40], [69], [78], [82], [105], [106], [118], [119], [126], [152], [154], [164], [180], [187], [202].

# 16.* Das Cauchy-Problem der Einsteinschen Feldgleichungen

## 16.1. Aufgabenstellung

Die physikalischen Grundgesetze haben meistens eine solche Struktur, daß aus der Kenntnis des gegenwärtigen Zustands eines Systems seine zukünftige Entwicklung bestimmbar ist. In der Mechanik z. B. ist die Bahnkurve eines Massenpunktes durch Vorgabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit eindeutig fixiert; in der Quantenmechanik der Schrödinger-Gleichung folgt aus den Werten der $\psi$-Funktion in der Gegenwart eindeutig der zukünftige Zustand.

Wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, haben auch die Gleichungen des Gravitationsfeldes eine solche kausale Struktur. Um sie zu erkennen, müssen wir zunächst einmal präzisieren, was wir unter „Gegenwart" und „gegenwärtiger Zustand" zu verstehen haben. Als Vorbereitung dazu untersuchen wir Eigenschaften dreidimensionaler Flächen in einem vierdimensionalen Raum. In den späteren Abschnitten werden wir uns mit dem Cauchy-Problem im wesentlichen unter dem Aspekt beschäftigen, die Struktur der Feldgleichungen besser verstehen zu lernen.

## 16.2. Dreidimensionale Hyperflächen und Reduktionsformeln für den Krümmungstensor

*Metrik und Projektionstensor.* Gegeben sei eine dreidimensionale Hyperfläche in einem vierdimensionalen Riemannschen Raum, die wir uns als Element einer Flächenschar vorstellen können; die Normalenvektoren $n^a$ dieser Flächenschar seien nicht nullartig:

$$n_a n^a = \varepsilon = \pm 1 . \tag{16,1}$$

Nehmen wir diese Flächen als Koordinatenflächen $x^4 = \text{const}$ eines nicht notwendig orthogonalen Koordinatensystems und bezeichnen die Komponenten des Normalen-

vektors mit

$$n_a = (0, 0, 0, \varepsilon N), \qquad n^a = (-N^\alpha/N, 1/N),$$
$$a, b, \ldots = 1, \ldots, 4, \qquad \alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, 3, \tag{16,2}$$

dann besteht zwischen dem metrischen Tensor $g_{\alpha\beta}$ der Hyperflächen

$$\overset{(3)}{ds^2} = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{16,3}$$

und dem metrischen Tensor $g_{ab}$ des vierdimensionalen Raumes der Zusammenhang

$$\overset{(4)}{ds^2} = g_{ab}\, dx^a\, dx^b = g_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha\, dx^4)\,(dx^\beta + N^\beta\, dx^4) + \varepsilon(N\, dx^4)^2, \tag{16,4}$$

aus dem für die inversen Tensoren

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} + \varepsilon N^\alpha N^\beta/N^2 & -\varepsilon N^\alpha/N^2 \\ -\varepsilon N^\beta/N^2 & \varepsilon/N^2 \end{pmatrix}, \qquad g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = \delta^\nu_\alpha, \quad N_\alpha = g_{\alpha\beta} N^\beta \tag{16,5}$$

folgt.

Mit Hilfe des Projektionstensors $h_{ab} = g_{ab} - \varepsilon n_a n_b$, der die Eigenschaften

$$h_{ab} h^b{}_c = h_{ac}, \qquad h_{ab} n^a = 0 = h^{4b}, \qquad h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \qquad h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \qquad h^4_b = 0 \tag{16,6}$$

hat, können wir jeden Tensor in seine Komponenten parallel oder senkrecht zur Hyperfläche bzw. zum Normalenvektor zerlegen.

*Der Tensor $K_{ab}$ der äußeren Krümmung.* Bei der Zerlegung

$$n_{a;b} = n_{a;i}(\varepsilon n^i n_b + h^i{}_b) \tag{16,7}$$

der kovarianten Ableitung des Normalenvektors stoßen wir auf den durch

$$K_{ab} = -n_{a;i} h^i{}_{;b} = -n_{a;b} + \varepsilon \dot{n}_a n_b \tag{16,8}$$

definierten Tensor $K_{ab}$. Da $n_a$ ein Einheitsvektor und proportional zum Gradienten einer Flächenschar ist, ist $K_{ab}$ symmetrisch; er hat (als Projektion) natürlich keine Komponenten in Richtung der Flächennormalen:

$$K_{ab} = K_{ba}, \qquad K_{ab} n^a = 0. \tag{16,9}$$

Seine Komponenten sind Linearkombinationen der Christoffel-Symbole $\overset{4}{\Gamma}{}^4_{\alpha\beta}$ des vierdimensionalen Raumes:

$$K_{ab} = -h^i_a h^k_b n_{i;k} = \varepsilon N h^\alpha_a h^\beta_b \overset{4}{\Gamma}{}^4_{\alpha\beta},$$
$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon N \overset{4}{\Gamma}{}^4_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}(N_{\alpha,\beta} + N_{\beta\alpha} - 2N_\nu \overset{3}{\Gamma}{}^\nu_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,4}). \tag{16,10}$$

Wie man aus Abb. 16.1 entnimmt, hat der Tensor $K_{ab}$ eine einfache geometrische Bedeutung: Bei einer Verschiebung des Normalenvektors längs der Hyperfläche gilt

$$Dn_a = n_{a;b}\, dx^b = -K_{ab}\, dx^b. \tag{16,11}$$

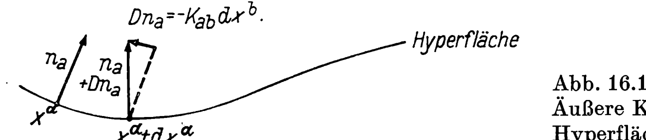



Abb. 16.1
Äußere Krümmung einer Hyperfläche

$K_{ab}$ ist also ein Maß für die *äußere* Krümmung der Fläche, d. h. für die Krümmung in bezug auf den umgebenden Raum (im Unterschied zur inneren, allein durch den dreidimensionalen Krümmungstensor $\overset{3}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Fläche gekennzeichneten Krümmung). In der Flächentheorie wird dem Tensor $K_{ab}$ die *zweite Fundamentalform* zugeordnet.

*Zerlegung der Ableitung eines zu $n_a$ senkrechten Vektors.* Für die kovariante Ableitung eines beliebigen zum Normalenvektor $n_a$ orthogonalen Vektors $T_a$,

$$T_a n^a = 0, \qquad T^a = (T^\alpha, 0), \qquad T_a = (T_\alpha, T_\beta N^\beta), \tag{16,12}$$

erhält man nach einer kurzen Zwischenrechnung unter Verwendung von (16,9) und $n_{a;b}T^b = -n^a T_{a;b}$ die Zerlegung

$$T_{a;b} = h^i_a h^k_b T_{i;k} + \varepsilon n_b \dot{T}_i h^i_a + \varepsilon n_a T^i K_{ib} - n_a n_b T^i \dot{n}_i. \tag{16,13}$$

Der zum Normalenvektor vollständig orthogonale erste Term dieser Zerlegung läßt sich wegen $h^4_a = 0$ und

$$\begin{aligned} h^i_a h^k_b T_{i;k} &= h^\alpha_a h^\beta_b \left(T_{\alpha,\beta} - T_\tau \overset{4}{\Gamma}{}^\tau_{\alpha\beta}\right) \\ &= h^\alpha_a h^\beta_b [T_{\alpha,\beta} - \tfrac{1}{2} T^\varrho (g_{\varrho\beta,\alpha} + g_{\varrho\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\varrho})] \end{aligned}$$

durch die kovariante Ableitung des Dreiervektors $T_\alpha$ bezüglich der dreidimensionalen Metrik $g_{\alpha\beta}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} h^i_a h^k_b T_{i;k} &= h^\alpha_a h^\beta_b T_{\alpha\|\beta}, \\ T_{\alpha\|\beta} &\equiv T_{\alpha,\beta} - \overset{3}{\Gamma}{}^\varrho_{\alpha\beta} T_\varrho. \end{aligned} \tag{16,14}$$

Da bei der Ableitung dieser Beziehung nur die Definition der kovarianten Ableitung und die Orthogonalität von $T_i$ zu $n_i$ benutzt wurden, gelten analoge Gleichungen für die Projektionen der Ableitung beliebiger, zum Normalenvektor senkrechter Tensoren höherer Stufe.

*Reduktionsformeln für den Krümmungstensor.* Ziel der folgenden Rechnungen ist es, Beziehungen herzustellen zwischen dem Krümmungstensor $\overset{4}{R}_{abmn}$ des vierdimensionalen Raumes einerseits und den Eigenschaften der Hyperflächen, d. h. dem dreidimensionalen Krümmungstensor $\overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ und den Größen $n_a$ und $K_{ab}$ andererseits.

Wegen (16,14), (16,13) und der aus (16,8) folgenden Gleichung

$$h_{ab;i} = -(\dot{n}_a n_b + n_a \dot{n}_b)\, n_i + \varepsilon (K_{ai} n_b + K_{bi} n_a) \tag{16,15}$$

gilt

$$(T_{\beta\|\mu\|\nu} - T_{\beta\|\nu\|\mu})\, h^\beta_b h^\mu_m h^\nu_n$$
$$= (T_{r;s} h^r_i h^s_k)_{;q} h^i_b (h^k_m h^q_n - h^k_n h^q_m)$$
$$= (T_{r;s;q} - T_{r;q;s})\, h^r_b h^s_m h^q_n + T_{r;s} (h^r_i h^s_k)_{;q} h^i_b (h^k_m h^q_n - h^k_n h^q_m)$$

oder

$$\overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} T^\alpha h^\beta_b h^\mu_m h^\nu_n = \overset{4}{R}_{\alpha rsq} T^\alpha h^r_b h^s_m h^q_n + \varepsilon (K_{nb} K_{m\alpha} - K_{bm} K_{n\alpha})\, T^\alpha .$$

Da diese Gleichung für jeden Vektor $T^\alpha$ gilt, besteht zwischen den Krümmungstensoren die Beziehung (man beachte $h^\beta_\sigma = \delta^\beta_\sigma$, $h^4_a = 0$)

$$\overset{4}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \varepsilon (K_{\beta\mu} K_{\alpha\nu} - K_{\beta\nu} K_{\mu\alpha}) . \tag{16,16}$$

In der Flächentheorie bezeichnet man die analoge Verknüpfung von innerer und äußerer Krümmung einer Fläche als Gaußsche Gleichung.

Darstellungen für die restlichen Komponenten des vierdimensionalen Krümmungstensors erhalten wir nach ähnlichen Umformungen aus den zweiten Ableitungen des Normalenvektors. Zunächst folgt aus (16,8), (16,14) und (16,15)

$$(n_{q;r;s} - n_{q;s;r})\, h^q_b h^r_m h^s_n$$
$$= [(n_{q;i} h^i_r)_{;s} - (n_{q;i} h^i_s)_{;r}]\, h^q_b h^r_m h^s_n$$
$$= (K_{qs;r} - K_{qr;s})\, h^q_b h^r_m h^s_n = (K_{\beta\nu\|\mu} - K_{\beta\mu\|\nu})\, h^\beta_b h^\mu_m h^\nu_n$$

und hieraus die Codazzi-Gleichung

$$\overset{4}{R}{}^a{}_{\beta\mu\nu} n_a = K_{\beta\nu\|\mu} - K_{\beta\mu\|\nu} . \tag{16,17}$$

Analog erhalten wir aus

$$(n_{q;r;s} - n_{q;s;r})\, h^q_b n^r h^s_n$$
$$= [(\varepsilon \dot{n}_q n_r - K_{qr})_{;s} - (\varepsilon \dot{n}_q n_s - K_{qs})_{;r}]\, n^r h^q_b h^s_n$$
$$= \dot{n}_{q;s} h^q_b h^s_n + K_{qr} n^r{}_{;s} h^q_b h^s_n - \varepsilon \dot{n}_b \dot{n}_n + K_{bn;r} n^r - K_{qs} (h^q_b h^s_n)_{;r} n^r$$

schließlich

$$\overset{4}{R}{}^a{}_{\beta m\nu} n_a n^m = \dot{n}_{(\beta;\nu)} + K_{\beta\mu} K^\mu{}_\nu - \varepsilon \dot{n}_\beta \dot{n}_\nu + \underset{n}{\pounds} K_{\beta\nu} . \tag{16,18}$$

Die Reduktionsformeln (16,16) bis (16,18) werden häufig dazu benutzt, den Krümmungstensor einer Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta + \varepsilon N^2 (\mathrm{d}x^4)^2, \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{16,19}$$

durch den des dreidimensionalen Unterraums (der Metrik $g_{\alpha\beta}$) und die Funktion $N$ auszudrücken. In diesem Spezialfall ($N^\alpha = 0$) vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta,4}/2N, \\
\overset{4}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \varepsilon (K_{\beta\mu} K_{\alpha\nu} - K_{\beta\nu} K_{\alpha\mu}), \\
\overset{4}{R}{}^4{}_{\beta\mu\nu} &= \varepsilon (K_{\beta\nu\|\mu} - K_{\beta\mu\|\nu})/N, \\
\overset{4}{R}{}^4{}_{\beta 4\nu} &= \varepsilon K_{\beta\nu,4}/N - N_{,\beta\|\nu}/N + \varepsilon K_{\alpha\beta} K^\alpha{}_\nu .
\end{aligned} \tag{16,20}$$

### 16.3. Das Cauchy-Problem der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen

Wir haben jetzt die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt, um folgende Fragen beantworten zu können: Gegeben sei eine raumartige Fläche, d. h. eine Fläche mit zeitartigem Normalenvektor $n_a$; welche Anfangswerte der Metrik *kann* man auf dieser Fläche vorgeben und welche *muß* man vorschreiben, um mit Hilfe der Vakuumfeldgleichungen die weitere Entwicklung des Systems berechnen zu können?

Es ist von vornherein klar, daß unabhängig von der Wahl der Anfangswerte die *Metrik* der Raum-Zeit gar nicht eindeutig bestimmt sein kann: Wir können ja sowohl auf der Anfangsfläche wie auch im ganzen vierdimensionalen Raum noch beliebige Koordinatentransformationen durchführen. Vorzugeben und in ihrer zeitlichen Entwicklung bestimmbar werden nur gewisse charakteristisch geometrische Eigenschaften sein. Man kann z. B. zeigen, daß man die Größen $N^\alpha$ der Metrik (16,4) nicht nur auf einer Anfangsfläche $x^4 = \mathrm{const}$, sondern im ganzen Raum vorgeben muß, um die Metrik eindeutig zu fixieren. Um die Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir im folgenden von $N^\alpha = 0$ ausgehen, d. h. uns auf die zeitorthogonalen Koordinaten (16,19) mit $\varepsilon = -1$ beschränken. Die wesentlichen Aussagen der Analyse des Cauchy-Problems werden von dieser Spezialisierung nicht berührt.

*Vakuumfeldgleichungen.* Schreiben wir für die Metrik (16,19), d. h. für

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta - N^2(\mathrm{d}x^4)^2,$$

unter Verwendung von

$$\overset{4}{R}_{bm} = -(h^{ra} - n^r n^a)\,\overset{4}{R}_{abrm} = \overset{4}{R}{}^4{}_{b4m} + g^{\alpha\nu}\overset{4}{R}_{\alpha b\nu m}$$

und der Reduktionsformeln (16,20) die Einsteinschen Feldgleichungen $R_{bm} = 0$ auf, dann erhalten wir nach einer zweckmäßigen Umformung

$$\begin{aligned} \overset{4}{R}{}^4_4 - g_{\beta\mu}\overset{4}{R}{}^{\beta\mu} &= -\overset{3}{R} - K^\beta_\beta K^\mu_\mu + K_{\beta\mu}K^{\beta\mu} = 0, \\ N\overset{4}{R}{}^4_\mu &= K^\beta{}_{\mu\|\beta} - K^\beta{}_{\beta\|\mu} = 0, \end{aligned} \tag{16,21}$$

$$\overset{4}{R}_{\beta\mu} = \overset{3}{R}_{\beta\mu} - 2K_{\alpha\beta}K^\alpha{}_\mu + K^\alpha_\alpha K_{\beta\mu} - K_{\beta\mu,4}/N - N_{,\beta\|\mu}/N = 0. \tag{16,22}$$

*Anfangswerte und dynamische Struktur der Feldgleichungen.* Die Einsteinschen Feldgleichungen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung; dementsprechend würde man erwarten, daß man auf einer Anfangsfläche $x^4 = 0$ die Metrik und ihre ersten Zeitableitungen (Ableitungen nach $x^4$) vorgeben und daraus die weitere zeitliche Entwicklung der Metrik berechnen kann. Wie die Untersuchung der Feldgleichungen (16,21) bis (16,22) zeigt, ist diese Vermutung folgendermaßen zu präzisieren:

1. Um aus Gl. (16,22) die höchsten vorkommenden zeitlichen Ableitungen, nämlich $K_{\beta\mu,4}$, berechnen zu können, muß man die Metrik $(g_{\alpha\beta}, N)$ und ihre erste zeitliche Ableitung $(K_{\alpha\beta})$ kennen, d. h. diese Größen auf der Hyperfläche $x^4 = 0$ vorgeben.

2. Die Feldgleichungen (16,21) enthalten nur räumliche Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ und $K_{\alpha\beta}$; infolgedessen sind die Anfangswerte $g_{\alpha\beta}(x^\nu, 0)$ und $K_{\alpha\beta}(x^\nu, 0)$ nicht frei wählbar. Die Gleichungen (16,21) spielen also die Rolle von Nebenbedingungen, sie schränken die in den Anfangswerten enthaltenen Freiheitsgrade, nämlich die innere und die äußere Krümmung des dreidimensionalen Ortsraumes, ein.

3. Es ist nicht möglich, mit Hilfe der Feldgleichungen aus den Anfangswerten $g_{\alpha\beta}(x^\nu, 0)$, $K_{\alpha\beta}(x^\nu, 0)$ und $N(x^\nu, 0)$ die zeitliche Ableitung von $N$ zu bestimmen. Die Funktion $N = \sqrt{-g_{44}}$ muß vielmehr für alle Zeiten vorgegeben werden (hätten wir die $N_\alpha$ der allgemeinen Form (16,4) der Metrik mitgenommen, würde für sie die gleiche Feststellung gelten). Da man durch Koordinatentransformationen (Einführung von Gaußschen Koordinaten) immer $N = 1$ erreichen kann, ist diese Sonderrolle von $N$ verständlich: $N$ entspricht keinem echten dynamischen Freiheitsgrad.

4. Hat man sich $N$ und die Anfangswerte von $g_{\alpha\beta}$ und $K_{\alpha\beta}$ unter Beachtung der vier Nebenbedingungen (16,21) vorgegeben, dann kann man aus den sechs Feldgleichungen (16,22) die weitere zeitliche Entwicklung der Metrik berechnen. Man nennt die Gleichungen (16,22) deshalb auch die eigentlichen dynamischen Feldgleichungen.

Dabei sichern die Bianchi-Identitäten

$$\overset{4}{R}{}^a{}_{b;a} = \left[(h^a_i - n^a n_i)\, \overset{4}{R}{}^i{}_b\right]_{;a} = 0 \tag{16,23}$$

wegen der aus ihnen folgenden Gleichung

$$-\left(n_i \overset{4}{R}{}^i{}_b\right)_{;a} n^a = \frac{1}{N}\left(N\overset{4}{R}{}^4{}_b\right)_{;4} = NK^\nu_\nu \overset{4}{R}{}^4{}_b + \left(\overset{4}{R}{}^\alpha{}_b\right)_{;\alpha}, \tag{16,24}$$

daß die Nebenbedingungen (16,21) nicht nur für $x^4 = 0$, sondern für alle Zeiten erfüllt werden. Sind nämlich die dynamischen Gleichungen $\overset{4}{R}_{\beta\mu} = 0$ für alle Zeiten erfüllt und gilt $R^4{}_b = 0$ für $x^4 = 0$, dann verschwindet wegen (16,24) auch die Zeitableitung von $R^4{}_b$ (und damit alle höheren Zeitableitungen), $R^4{}_b = 0$ gilt immer.

Die Aufteilung der Feldgleichungen in Nebenbedingungen und dynamische Gleichungen und die Frage nach den voneinander unabhängigen dynamischen Größen des Gravitationsfeldes spielen eine große Rolle bei allen Versuchen, das Gravitationsfeld zu quantisieren.

## 16.4. Das charakteristische Cauchy-Problem

Aus den Anfangswerten der Metrik und ihrer ersten Ableitungen in Richtung der Flächennormalen konnten wir die Metrik in der ganzen Raum-Zeit im wesentlichen deshalb berechnen, weil uns die Vakuumfeldgleichungen die *zweiten* Ableitungen in Richtung der Flächennormalen als Funktionen der Anfangswerte geben. Dabei spielte es nur eine untergeordnete Rolle, daß die Flächennormale zeitartig war, $\varepsilon$ den Wert $-1$ hatte.

Ganz anders sind die Verhältnisse aber dann, wenn die Anfangsfläche $u = x^4 = \text{const}$ eine Nullfläche ist, d. h. eine Fläche, deren Normalenvektor $k_a = u_{,a}$ ein Nullvektor ist. Wegen

$$k_a = u_{,a} = (0, 0, 0, 1), \qquad k_a k^a = g^{ab} k_a k_b = 0 \tag{16,25}$$

gilt $g^{44} = 0$, und durch Koordinatentransformationen $x^{\nu'} = x^\nu(x^\alpha, u)$, $u' = u$ läßt sich außerdem noch $g^{41} = 0 = g^{42}$ erreichen. In diesen bevorzugten Koordinaten gilt also (man beachte $k^a = (0, 0, k^3, 0)$ und $g_{ab} g^{bi} = \delta^i_a$)

$$g^{44} = g^{41} = g^{42} = 0, \qquad g_{31} = g_{32} = g_{33} = 0, \qquad g_{34} g^{34} = 1. \tag{16,26}$$

Da zweite Ableitungen in den Krümmungstensor nur in der Kombination

$$\overset{4}{R}_{mabn} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ab,mn} + g_{mn,ab} - g_{an,mb} - g_{mb,an}) + \cdots \tag{16,27}$$

eingehen, treten zweite Ableitungen nach $u = x^4$ nur in der Feldgleichung

$$\overset{4}{R}_{44} = -\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,44} + \cdots = 0 \tag{16,28}$$

auf, während die restlichen 9 Feldgleichungen

$$\overset{4}{R}_{4\alpha} = 0, \qquad \overset{4}{R}_{\alpha\beta} = 0 \tag{16,29}$$

höchstens erste Ableitungen nach $x^4$ enthalten.

Obwohl wir durch die Koordinatenwahl (16,26) die mit möglichen Koordinatentransformationen zusammenhängenden unphysikalischen Freiheitsgrade weitgehend beseitigt haben, reichen die Feldgleichungen keineswegs aus, um aus der Metrik und ihren ersten Ableitungen die zweiten Ableitungen zu berechnen. Das *charakteristische* Cauchy-Problem, d. h. das Anfangswertproblem für eine Nullhyperfläche, unterscheidet sich grundlegend vom gewöhnlichen Cauchy-Problem, d. h. dem Anfangswertproblem für eine raumartige Fläche.

Wir wollen hier nicht auf Einzelheiten eingehen, sondern uns nur am Beispiel der in Abschnitt 15.3. untersuchten ebenen Wellen

$$\begin{gathered} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + H\,\mathrm{d}u^2, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H = 0, \qquad H_{,n}k^n = \frac{\partial H}{\partial v} = 0 \end{gathered} \tag{16,30}$$

die physikalischen Ursachen für diese Verschiedenartigkeit klarmachen. Würden wir hier für $u = 0$ die Anfangswerte von $H = g_{44}$ als zunächst beliebige Funktion $H(x, y, v, 0)$ vorgeben, könnten wir den weiteren Verlauf der Funktion $H$ aus diesen Werten nicht bestimmen; daran würde auch die zusätzliche Vorgabe von Ableitungen nach $u$ nichts ändern. Die Feldgleichungen (16,30) geben nur Bedingungen für die Anfangswerte, die Abhängigkeit der Metrik von $u$ bleibt unbestimmt. Physikalisch hängt diese Unbestimmtheit mit dem möglichen Auftreten von Gravitationsstoßwellen zusammen, also von Wellen, deren Amplitude $H$ außerhalb eines endlichen $u$-Bereiches Null ist. Eine Nullfläche $u = z - ct = 0$ ist ja für einen Beobachter in einem Inertialsystem eine zweidimensionale Fläche, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Eine zu dieser Fläche parallele Wellenfront einer Gravitationsstoßwelle wird auf der Fläche nicht bemerkt (es gibt keinen Schnittpunkt; vgl. Abb. 16.2). Ein

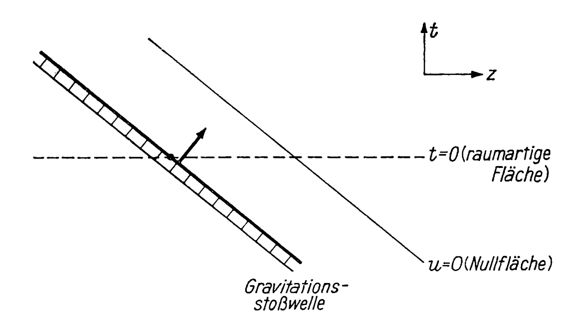



Abb. 16.2 Gravitationsstoßwelle und charakteristisches bzw. gewöhnliches Anfangswertproblem

Beobachter, der nur die Metrik auf der Fläche $u = 0$ kennt, kann das Eintreffen der Stoßwelle nicht vorhersagen. Eine raumartige Fläche dagegen würde die Stoßwelle irgendwo schneiden, d. h., aus den Anfangswerten auf einer solchen Fläche kann der weitere Ablauf der Welle bestimmt werden (kennt man $H$ auf der Fläche $t = t_0$ für *alle* Werte von $z$, ist $H$ als Funktion von $u = z - ct$ bekannt).

## 16.5. Die Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zweier Metriken

Bei der praktischen Lösung der Feldgleichungen steht man gelegentlich vor der Aufgabe, zwei für verschiedene Raum-Zeit-Bereiche gefundene Metriken aneinander anzuschließen, also z. B. eine im Innern eines Sterns gültige Lösung der Feldgleichungen $R_{ab} - Rg_{ab}/2 = \varkappa T_{ab}$ mit einer für den Außenbereich zuständigen Lösung der Vakuumgleichungen $R_{ab} = 0$ zu verbinden.

Offensichtlich brauchen nicht alle Komponenten des Energieimpulstensors an der Grenzfläche stetig zu sein. Welche Stetigkeitseigenschaften müssen aber der Energieimpulstensor und die Metrik und ihre Ableitungen haben, damit man noch sinnvoll von einer Lösung der Einsteinschen Gleichungen sprechen kann?

Wir wollen dieses Problem hier nur unter zwei Einschränkungen behandeln: Die Grenzfläche soll keine Nullfläche sein (dort können selbst im Vakuum echte Unstetigkeiten der Metrik, d. h. Gravitationsstoßwellen, auftreten), und der Energieimpulstensor soll zwar unstetig sein können, aber keine $\delta$-funktionsartigen Singularitäten enthalten (Flächenbelegungen sollen nicht vorkommen). Außerdem wollen wir die Formeln dadurch vereinfachen, daß wir auf beiden Seiten der Grenzfläche $x^4 = \text{const}$ ein Koordinatensystem der Gestalt

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + \varepsilon N^2 (dx^4)^2 \tag{16,31}$$

benutzen (vgl. Abschnitt 2. dieses Kapitels).

Eine qualitative Aussage über die zu erwartenden Ergebnisse können wir mit der folgenden Überlegung gewinnen: Wenn gewisse Komponenten des Energieimpulstensors unstetig sind, dann sind wegen der Feldgleichungen auch die Komponenten des Krümmungstensors höchstens unstetig; sind aber die zweiten Ableitungen der Metrik höchstens unstetig, dann müssen die Metrik und ihre ersten Ableitungen stetig sein.

Bei der quantitativen Fassung dieser Aussage müssen wir beachten, daß man auch durch ungeschickte Koordinatenwahl gewissermaßen künstlich Unstetigkeiten der Metrik erzeugen kann. Die Grenzfläche zwischen den beiden Raumgebieten I und II soll natürlich eine vernünftige Fläche sein, d. h. bei Annäherung von I oder II her jeweils die gleichen metrischen Eigenschaften haben. Zur Vermeidung unnötiger Singularitäten werden wir auf beiden Seiten der Grenfläche dieselben Koordinaten einführen, d. h. auf der Grenzfläche

$$[g_{\alpha\beta}] \equiv \underset{\mathrm{I}}{g_{\alpha\beta}} - \underset{\mathrm{II}}{g_{\alpha\beta}} = 0 \tag{16,32}$$

fordern. Selbstverständlich sollen auch alle Ableitungen $\underset{3}{g_{\alpha\beta,\nu\mu\ldots}}$ dieser Metrik *in* der Fläche stetig sein, insbesondere der Krümmungstensor $\underset{3}{R_{\alpha\beta\mu\nu}}$. Auch die Funktion $N = \sqrt{\varepsilon g_{44}}$ könnten wir durch geeignete Koordinatentransformationen stetig machen

oder sogar auf 1 transformieren; wir wollen hier aber Unstetigkeit zulassen, jedoch keine Singularität.

Weitere Aussagen über das Stetigkeitsverhalten der Metrik lassen sich aus den Feldgleichungen gewinnen. Wie die Reduktionsformeln (16,20) zeigen, sind zweite Ableitungen der Metrik in Richtung der Flächennormalen nur in den Komponenten $\overset{4}{R}{}^4{}_{\beta 4\nu}$ des Krümmungstensors enthalten; sie gehen infolgedessen nur in den räumlichen Teil der Feldgleichungen in der Kombination

$$G^\alpha_\beta = \frac{\varepsilon}{N}\,(K^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta K^\nu_\nu)_{,4} + \hat{G}^\alpha_\beta(K_{\mu\nu},\, g_{\mu\nu},\, g_{\mu\nu,\lambda},\, K_{\mu\nu,\lambda},\, N,\, N_{,\lambda},\, \ldots) = \varkappa T^\alpha_\beta \tag{16,33}$$

ein. Da in (16,33) weder $T^\alpha_\beta$ noch $\hat{G}^\alpha_\beta$ auf der Grenzfläche singulär werden, muß $K^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta K^\nu_\nu$ und damit $K_{\alpha\beta}$ selbst stetig sein:

$$[K_{\alpha\beta}] = \underset{\mathrm{I}}{K_{\alpha\beta}} - \underset{\mathrm{II}}{K_{\alpha\beta}} = 0. \tag{16,34}$$

Während (16,32) die Gleichheit der inneren Krümmung der beiden Seiten der Grenzfläche sichert, fordert (16,34) die Übereinstimmung auch der äußeren Krümmung.

Wenn die beiden Übergangsbedingungen (16,32) und (16,34) erfüllt sind, sind wegen (16,20) auch $\overset{4}{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ und $N\overset{4}{R}{}^4{}_{\beta\mu\nu}$ stetig; wegen der Feldgleichungen muß dann aber auch

$$[T^4_4] = 0, \qquad [NT^4_\alpha] = 0 \tag{16,35}$$

gelten.

Wir fassen zusammen: Wenn auf der Grenzfläche $x^4 = \mathrm{const}$ zweier Metriken der Form (16,31) der Energieimpulstensor nicht singulär ist, müssen dort Metrik $g_{\alpha\beta}$ und äußere Krümmung $K_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta,4}/2N$ der Fläche sowie die Komponenten $T^4_4 = \varepsilon n_a n^b T^a_b$ und $NT^4_\alpha = \varepsilon n_a T^a_\alpha$ des Energieimpulstensors stetig sein. Während eine eventuelle Unstetigkeit von $N = \sqrt{\varepsilon g_{44}}$ durch eine Koordinatentransformation beseitigt werden kann, kann $T_{\alpha\beta}$ durchaus unstetig sein; dabei muß aber natürlich

$$[G^\alpha_\beta] = \varkappa[T^\alpha_\beta] \tag{16,36}$$

gelten.

Bei dem in Abschnitt 11.3. durchgeführten Anschluß von innerer und äußerer Schwarzschild-Lösung haben wir (16,32) durch die Forderung der Stetigkeit der Metrik und (16,35) durch $p = 0$ erfüllt; die Übergangsbedingungen (16,34) sind dann automatisch befriedigt. Auch $N$ erweist sich in diesem Fall als stetig, während $N_{,4}$ (man beachte $r = x^4$!) unstetig ist.

*Literatur zu Kapitel 16.:*

[7], [46], [64], [73], [78], [108], [112], [114], [134], [174], [184].

# Invariante Charakterisierung strenger Lösungen

Man stelle sich vor, einem theoretischen Physiker wird eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen vorgelegt mit der Aufforderung, sie zu prüfen und festzustellen, ob sie schon bekannt ist, welche physikalische Situation sie beschreibt, welche Symmetrien vorliegen usw. Wegen der Freiheit der Wahl des Koordinatensystems sind solche Fragen durch bloßes Betrachten der Lösung meist zu nicht beantworten. So wird man sicher erst durch Bestimmung des Krümmungstensors feststellen, daß die Lösung

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 - x \sin y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + x^2(\tfrac{5}{4} + \cos y) \, \mathrm{d}y^2 + x^2 (\tfrac{5}{4} + \cos y - \tfrac{1}{4} \sin^2 y) \sin^2 y \, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}z^2$$

nur den flachen Minkowski-Raum( in unzweckmäßigen Koordinaten) beschreibt. Es gibt jedoch eine Reihe von Methoden, um Lösungen invariant (unabhängig von der Wahl der Koordinaten) zu charakterisieren. Gerade durch diese Methoden konnte man sich einen Einblick in die Struktur von Lösungen verschaffen und damit oft Wege zur Gewinnung neuer Lösungen finden.

Die Methoden, deren wichtigste wir in den folgenden Kapiteln kennenlernen wollen, sind auf den ersten Blick rein mathematischer Art. Wie oft in der theoretischen Physik ermöglicht aber das Erkennen der mathematischen Struktur gleichzeitig eine tiefere Einsicht in die physikalischen Eigenschaften.

## 17. Ausgezeichnete Vektorfelder und ihre Eigenschaften

### 17.1. Spezielle einfache Vektorfelder

Bei vielen Problemen und Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie treten ausgezeichnete Vektorfelder auf. Ihre Herkunft kann mehr physikalischer Natur (Geschwindigkeitsfeld einer Materieverteilung, Richtung von Lichtstrahlen) oder mehr mathematischer Natur sein (Eigenvektoren des Weyl-Tensors, Killing-Vektoren). Die Kenntnis der Eigenschaften solcher Vektorfelder kann man dazu benutzen, Lösungen zu klassifizieren oder durch Einführung von Koordinatensystemen, die dem bevorzugten Vektorfeld angepaßt sind, Rechnungen zu vereinfachen. Einige spezielle Vektorfelder und die ihnen angepaßten Koordinaten werden wir jetzt kennenlernen.

*Weltlinienkongruenzen.* Die im folgenden untersuchten Vektorfelder sollen die Eigenschaft haben, daß in jedem Punkt genau ein Vektor definiert ist. Einem solchen Vektorfeld $a^n(x^i)$ ist äquivalent eine Schar von Weltlinien (Weltlinienkongruenz), deren Tangentenvektoren die Richtungen von $a^n$ haben und die das betrachtete Raumgebiet schlicht und vollständig überdecken. Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, da mit $a^n$ auch $\lambda a^n$ die Richtung der Tangente hat.

Eine besonders einfache Form der Vektoren $a^n(x^i)$ erhält man, wenn man diese Weltlinien als Koordinatenlinien (z. B. $x^\alpha$ = const, $x^4$ variabel) nimmt; das Vektorfeld hat dann die Normalform

$$a^n(x^i) = \big(0, 0, 0, a^4(x^i)\big). \qquad (17,1)$$

Durch eine Koordinatentransformation $x^{4'} = x^{4'}(x^i)$ kann man darüber hinaus $a^4 = 1$ erreichen. Ist $a^n$ die Vierergeschwindigkeit der Materie, dann handelt es sich bei (17,1) um ein mitbewegtes Koordinatensystem.

*Hyperflächennormale Felder.* Ein Vektorfeld heißt hyperflächennormal (oder rotationsfrei), wenn es möglich ist, eine Schar von Flächen $f(x^i)$ = const so durch die Weltlinienkongruenz zu legen, daß die Weltlinien und damit auch die Vektoren des Feldes senkrecht auf den Flächen stehen (Abb. 17.1).

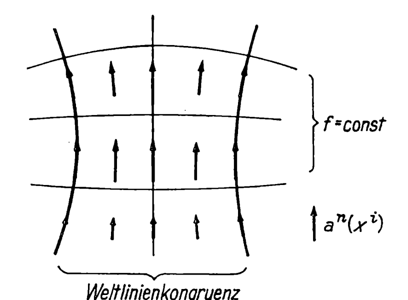



Abb. 17.1
Hyperflächennormales Vektorfeld

Das Vektorfeld $a^n$ muß also die Richtung des Gradienten der Flächenschar haben,

$$f_{,n} = \lambda a_n,$$

und damit auch die Gleichungen

$$a_{n;m} - a_{m;n} = \frac{\lambda_{,n}}{\lambda} a_m - \frac{\lambda_{,m}}{\lambda} a_n \qquad (17,2)$$

bzw.

$$\omega^i \equiv \tfrac{1}{2} \varepsilon^{imnr} a_{[m;n]} a_r = 0 \qquad (17,3)$$

erfüllen. Ein Vektorfeld $a^n$ kann nur dann hyperflächennormal sein, wenn seine in (17,3) definierte Rotation $\omega^i$ verschwindet. Man kann zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist: Ein Vektorfeld ist genau dann hyperflächennormal, wenn (17,3) gilt.

Während sich die kontravarianten Komponenten $a^n$ eines Vektors immer auf die Normalform (17,1) transformieren lassen, ist eine entsprechende Transformation der kovarianten Komponenten auf die Gestalt

$$a_n(x^i) = \big(0, 0, 0, a_4(x^i)\big) \qquad (17,4)$$

in einem Raumgebiet nur dann möglich, wenn das Vektorfeld hyperflächennormal ist; man sieht dies unmittelbar daran, daß (17,4) äquivalent zu $a_n = a_4 x^4{}_{,n}$ ist. Nimmt man die Flächen $f$ = const als Koordinatenflächen, kann man, wenn $a^n$ kein Nullvektor ist, gleichzeitig mit (17,1) und (17,4) die Metrik auf die Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + g_{44}(dx^4)^2 \tag{17,5}$$

bringen. Den Fall des Nullvektors werden wir in Abschnitt 17.3. untersuchen.

*Geodätische Vektorfelder.* Ein Vektorfeld heißt geodätisch, wenn die Weltlinien $x^i(s)$ der ihm zugeordneten Kongruenz der Geodätengleichung genügen:

$$t_{i;n} t^n = 0, \qquad t^i \equiv dx^i/ds. \tag{17,6}$$

Da ja $t^i = \lambda(x^m)\, a^i$ gelten soll, bedeutet dies für das Vektorfeld $a^n$

$$a_{[m} a_{i];n} a^n = 0. \tag{17,7}$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, d. h., wenn sie erfüllt ist, kann man zu $a^i$ stets eine Funktion $\lambda$ so bestimmen, daß $t^i$ der Gl. (17,6) genügt.

Ist das Vektorfeld hyperflächennormal und geodätisch, dann folgt in der Metrik (17,5) wegen (17,1) und (17,4)

$$a_{\alpha;n} a^n = 0 = \Gamma^4_{\alpha 4} = \tfrac{1}{2}\, g_{44,\alpha} g^{44}, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

d. h., $g_{44}$ hängt nur von $x^4$ ab und kann durch eine Koordinatentransformation $x^{4\prime} = x^{4\prime}(x^4)$ auf $\pm 1$ gebracht werden:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^i)\, dx^\alpha\, dx^\beta \pm (dx^4)^2. \tag{17,8}$$

*Killing-Vektorfelder.* Killing-Vektorfelder sind Vektorfelder, die der Bedingung

$$a_{i;n} + a_{n;i} = 0 \tag{17,9}$$

genügen. Wegen ihrer großen Bedeutung werden wir sie in Kapitel 19. ausführlicher behandeln.

*Kovariant konstante Vektorfelder.* Ein Vektorfeld ist kovariant konstant, wenn seine kovariante Ableitung verschwindet:

$$a_{i;n} = 0. \tag{17,10}$$

Aus der Definition (6,4) des Krümmungstensors folgt sofort

$$a^k R_{kinm} = 0. \tag{17,11}$$

Krümmungstensor und damit auch Metrik sind eingeschränkt, wenn ein solches Vektorfeld existiert.

Ist $a^i$ kein Nullvektor, dann gilt in der Metrik (17,8)

$$a_{\alpha;\beta} = 0 = \Gamma^4_{\alpha\beta},$$

d. h., $g_{\alpha\beta}$ ist unabhängig von $x^4$. Wegen (16,19) verschwindet der Tensor $K_{\alpha\beta}$ der äußeren Krümmung der Fläche $x^4$ = const, und die Reduktionsformeln (16,15) und Gl. (17,11) führen auf

$$\overset{4}{R}_{4\beta\nu\mu} = 0, \qquad \overset{3}{R}_{\alpha\beta\nu\mu} = \overset{4}{R}_{\alpha\beta\nu\mu}.$$

Für Vakuumlösungen der Einsteinschen Feldgleichungen gilt demnach

$$\overset{4}{R}_{\alpha\beta} = \overset{3}{R}_{\alpha\beta} = 0,$$

und da der Krümmungstensor des Dreier-Unterraums gemäß (6,26) allein aus dessen Ricci-Tensor aufgebaut werden kann, verschwindet der Krümmungstensor des vierdimensionalen Raumes vollständig.

Es gilt also der Satz: Besitzt eine Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen ein kovariant konstantes Vektorfeld, so handelt es sich um ein Nullvektorfeld, oder der Raum ist flach.

Die Vakuumlösungen mit kovariant konstantem Nullvektorfeld sind gerade die in Abschnitt 15.3. untersuchten ebenen Gravitationswellen.

## 17.2. Zeitartige Vektorfelder

*Die invariante Zerlegung von $u_{m;i}$ und ihre physikalische Interpretation.* Eines der wichtigsten Beispiele eines zeitartigen Vektorfeldes ist das Geschwindigkeitsfeld $u^i(x^n)$ einer Materieverteilung, z. B. das der Materie im Sterninnern oder das der (kontinuierlich verteilt gedachten) Sterne oder Galaxien im Weltall. Die Eigenschaften dieses Geschwindigkeitsfeldes kann man am besten bei der Untersuchung der kovarianten Ableitung $u_{i;n}$ erkennen. Die wesentliche Idee besteht darin, den zur Vierergeschwindigkeit $u^i$ senkrechten Anteil der kovarianten Ableitung, nämlich die Größe $u_{i;n} + u_{i;m}u^m u_n/c^2$ (man beachte, daß aus $u^i u_i = -c^2$ die Beziehung $u^i u_{i;n} = 0$ folgt) in den antisymmetrischen Teil, den symmetrisch-spurfreien Teil und die Spur selbst zu zerlegen:

$$\begin{aligned}
u_{i;n} &= -\dot{u}_i u_n/c^2 + \omega_{in} + \sigma_{in} + \Theta h_{in}/3, && \\
\dot{u}_i &= u_{i;n}u^n = \mathrm{D}u_i/\mathrm{D}\tau, && \dot{u}_i u^i = 0, \\
\omega_{in} &= u_{[i;n]} + \dot{u}_{[i}u_{n]}/c^2, && \omega_{in}u^n = 0, \\
\sigma_{in} &= u_{(i;n)} + \dot{u}_{(i}u_{n)}/c^2 - \Theta h_{in}/3, && \sigma_{in}u^n = 0, \\
\Theta &= u^i{}_{;i}, && \\
h_{in} &= g_{in} + u_i u_n/c^2, && h_{in}u^n = 0.
\end{aligned} \qquad (17{,}12)$$

Da diese Zerlegung kovariant ist, kennzeichnen die einzelnen Bestandteile in invarianter Weise das Strömungsfeld, sie haben die Namen

| | | |
|---|---|---|
| $\dot{u}_i$ | Beschleunigung, | |
| $\omega_{in}$ | Rotation (Rotationsgeschwindigkeit), | (17,13) |
| $\sigma_{in}$ | Scherung (Scherungsgeschwindigkeit), | |
| $\Theta$ | Expansion (Expansionsgeschwindigkeit). | |

Wir wollen jetzt die physikalische Bedeutung dieser Größen klären (und damit auch die Namensgebung (17,13) rechtfertigen).

Die Weltlinienkongruenz

$$x^a = x^a(y^\alpha, \tau), \qquad (17{,}14)$$

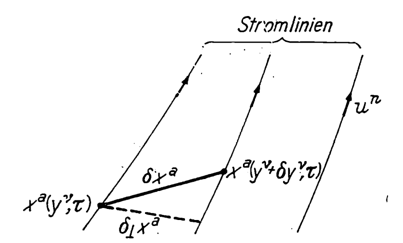



Abb. 17.2
Zur Kinematik einer Strömung

die dem Geschwindigkeitsfeld entsprechend

$$u^a(x^i) = \partial x^a/\partial \tau \tag{17,15}$$

zugeordnet ist, hat offensichtlich die physikalische Bedeutung der Stromlinienschar (vgl. Abb. 17.2). Längs der Weltlinie jedes Teilchens (jedes Volumenelementes) sind die $y^\alpha$ fest, und $\tau$ variiert; $y^\alpha$ kennzeichnet die verschiedenen Weltlinien (Teilchen). Bei festem Parameter $\tau$ gelangt man von der Weltlinie $(y^\alpha)$ zur benachbarten Weltlinie $(y^\alpha + \delta y^\alpha)$, indem man um

$$\delta x^a = \frac{\partial x^a}{\partial y^\alpha}\,\delta y^\alpha \tag{17,16}$$

fortschreitet. Wegen

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,\delta x^a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^a + \Gamma^a_{bc}\,\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^c = \frac{\partial^2 x^a}{\partial\tau\,\partial y^\alpha}\,\delta y^\alpha + \Gamma^a_{bc}u^b\,\delta x^c$$
$$= \frac{\partial u^a}{\partial y^\alpha}\,\delta y^\alpha + \Gamma^a_{bc}u^b\,\delta x^c = \frac{\partial u^a}{\partial x^n}\,\delta x^n + \Gamma^a_{bc}u^b\,\delta x^c$$

ändert sich dieser Differenzvektor beim Fortschreiten längs der Weltlinien um

$$(\delta x^a)^{\cdot} = u^a{}_{;n}\,\delta x^n. \tag{17,17}$$

Ein mit der Strömung mitbewegter Beobachter wird jedoch nicht $\delta x^a$, sondern die Projektion dieser Größe in seinen dreidimensionalen Ortsraum, also

$$\delta_\perp x^a = (g^a_b + u^a u_b/c^2)\,\delta x^b = h^a_b\,\delta x^b \tag{17,18}$$

als Abstand zu den ihm benachbarten Flüssigkeitselementen definieren. Da dieser Beobachter als sein „natürliches" mitbewegtes lokales Koordinatensystem ein solches benutzen wird, dessen Achsen nach Fermi-Walker transportiert werden (vgl. die Abschnitte 5.4. und 8.2.), wird er als Geschwindigkeit der benachbarten Materieelemente die Fermi-Ableitung von $\delta_\perp x^a$ definieren. Wir erhalten für diese Geschwindigkeit unter Verwendung von (17,17) und (17,18) und bei Beachtung von $(\delta_\perp x^a)\,u_a = 0$ die Beziehung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,(\delta_\perp x^a) - \frac{1}{c^2}\,(\delta_\perp x^n)\,(u^a\dot{u}_n - \dot{u}^a u_n) = (\delta_\perp x^n)^{\cdot}\,h^a_n$$

und hieraus schließlich mit (17,12)

$$(\delta_\perp x^n)^{\cdot}\,h^a_n = (u^a{}_{;n} + \dot{u}^a u_n/c^2)\,(\delta_\perp x^n)$$
$$= (\omega^a{}_n + \sigma^a{}_n + \Theta\,\delta^a_n/3)\,(\delta_\perp x^n). \tag{17,19}$$

Gleichung (17,19) gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $(\delta_\perp x^n)^{\cdot}\, h_n^a$ der dem Beobachter benachbarten Teilchen (Geschwindigkeit relativ zum Beobachter) und dem (infinitesimalen) Ortsvektor $\delta_\perp x^n$, der vom Beobachter zum Teilchen zeigt. Aus ihr können wir entnehmen:

1. Die Expansion $\Theta$ führt zu einem radial gerichteten Geschwindigkeitsfeld, dessen Betrag richtungsunabhängig ist; ein Volumenelement wird dabei gestaltstreu vergrößert ($\Theta > 0$) oder verkleinert ($\Theta < 0$).

2. Da sich der antisymmetrische Tensor $\omega_{mi}$ der Rotation entsprechend (17,3) durch

$$\omega^a = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{abmi} u_b \omega_{mi}, \qquad \omega_{mi} = \varepsilon_{miab}\omega^a u^b \tag{17,20}$$

auf den Wirbelvektor $\omega^a$ abbilden läßt, hat das durch ihn beschriebene Geschwindigkeitsfeld die Gestalt

$$(\delta_\perp x^n)^{\cdot}\, h_n^a = \varepsilon^a{}_{nmi}\omega^m u^i\, \delta_\perp x^n.$$

Die Geschwindigkeit steht senkrecht zum Ortsvektor $\delta_\perp x^n$ und zum Wirbelvektor $\omega^m$, es handelt sich um eine Rotation um die durch $\omega^m$ gegebene Achse.

3. Der symmetrische Tensor $\sigma_{an}$ der Scherung führt zu einem richtungsabhängigen Geschwindigkeitsfeld, das aus einer Teilchenkugel ein Ellipsoid erzeugt. Da die Spur $\sigma^n{}_n$ verschwindet, hat dieses Ellipsoid das gleiche Volumen wie die ursprüngliche Kugel, es handelt sich um eine volumentreue Gestaltsänderung.

*Spezialfälle und Aussagen über mögliche Koordinatensysteme.* Für Rechnungen benutzt man gern das mitbewegte Koordinatensystem

$$u^i = (0, 0, 0, u^4). \tag{17,21}$$

Wenn die Rotation $\omega_{mi}$ verschwindet, ist die durch $u^i$ gegebene Strömung hyperflächennormal, und die Metrik läßt sich in die Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^i)\, dx^\alpha\, dx^\beta - u_4^2\, dt^2, \qquad u_i = (0, 0, 0, u_4) \tag{17,22}$$

bringen. Schreibt man in dieser Metrik die kovariante Ableitung $u_{a;b}$ explizit auf und vergleicht das Ergebnis mit (17,12), dann kann man zeigen:

1. Für $\omega_{mi} = 0$, $\sigma_{mi} = 0$ enthält die Metrik $g_{\alpha\beta}$ des Ortsraumes die Zeit nur in einem allen Elementen gemeinsamen Faktor:

$$g_{\alpha\beta}(x^i) = V^2(x^\nu, t)\, \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\mu). \tag{17,23}$$

2. Für $\omega_{mi} = 0$, $\Theta = 0$ hängt die Determinante der Dreiermetrik $g_{\alpha\beta}$ nicht von der Zeit ab.

3. Für $\omega_{mi} = 0$, $\dot{u}_i = 0$ kann man $u_4$ auf $c$ transformieren.

Verschwinden Expansion und Scherung ($\Theta = 0$, $\sigma_{mi} = 0$), aber nicht die Rotation ($\omega_{mi} \neq 0$), dann ändern sich für den mitbewegten Beobachter die Abstände benachbarter Materieelemente nicht, es handelt sich um eine *starre Rotation*. Im mitbewegten Koordinatensystem (17,21) sieht man das daran, daß sich wegen

$$u^4 h_{ab,4} = \underset{u}{\pounds}(g_{ab} + u_a u_b/c^2) = u_{a;b} + u_{b;a} + (\dot{u}_a u_b + u_a \dot{u}_b)/c^2 = 0 \tag{17,24}$$

die rein räumliche Metrik $h_{ab}$ im Laufe der Zeit nicht ändert.

### 17.3.* Nullvektorfelder

Nullvektorfelder $k^n(x^i)$ lassen sich, in ähnlicher Weise wie die zeitartigen Geschwindigkeitsfelder, durch die Bestandteile ihrer kovarianten Ableitung $k_{i;n}$ invariant charakterisieren. Dabei treten allerdings einige Besonderheiten dadurch auf, daß man wegen $k_n k^n = 0$ z. B. einen Vektor $a_n$ nicht in einfacher Weise in seine Bestandteile parallel und senkrecht zu $k^n$ zerlegen kann: Aus $a_n = \lambda k_n = \hat{a}_n$ lassen sich $\lambda$ und $\hat{a}_n$ nicht eindeutig bestimmen. Man bevorzugt deshalb Projektionen auf einen zweidimensionalen, dem Vektor $k^n$ zugeordneten Unterraum (der durch die Vektoren $t_a$ und $\bar{t}_a$ aufgespannt wird).

*Sachs-Beine.* Das entsprechend (4,67) bis (4,71) eingeführte System von zwei reellen und zwei komplexen Nullvektoren, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} &k_a l^a = -1, \qquad t_a \bar{t}^a = 1, \qquad k_a k^a = k_a t^a = l_a l^a = l_a t^a = t_a t^a = 0 \\ &g_{ab} = t_a \bar{t}_b + \bar{t}_a t_b - k_a l_b - k_b l_a \end{aligned} \tag{17,25}$$

erfüllt, bezeichnet man auch als Sachs-Bein.

Die Vektoren eines Sachs-Beins sind durch Vorgabe von $k^n$ natürlich nicht eindeutig bestimmt: Bei festgehaltener $k^a$-Richtung bleiben die Beziehungen (17,25) bei den linearen Transformationen

$$\begin{aligned} k'^a &= A k^a \\ l'^a &= A^{-1}(l^a + B\bar{B}k^a + \bar{B}t^a + B\bar{t}^a \\ t'^a &= e^{iC}(t^a + Bk^a) \\ &A > 0,\ C \text{ reell},\ B \text{ komplex} \end{aligned} \tag{17,26}$$

erhalten.

Später werden wir auch Transformationen benutzen, die Sachs-Beine mit verschiedenen $k^a$-Richtungen miteinander verknüpfen. Eine spezielle Transformation, die ein Sachs-Bein mit vorgegebener Richtung von $k^a$ in ein Sachs-Bein mit vorgegebener Richtung von $k'^a$ überführt, ist

$$\begin{aligned} k'^a &= k^a - E\bar{E}l^a + \bar{E}t^a + E\bar{t}^a, \\ l'^a &= l^a, \qquad\qquad E \text{ komplex}, \\ t'^a &= t^a - El^a. \end{aligned} \tag{17,27}$$

Diese Transformation führt nur dann nicht zum Ziel, wenn $k'^a$ gerade in die alte $l^a$-Richtung fällt, also

$$k'^a = l^a, \qquad l'^a = k^a \tag{17,28}$$

gilt (Vertauschung von $k^a$ und $l^a$).

Die allgemeine Transformation zwischen zwei Sachs-Beinen setzt sich aus (17,27) [oder (17,28)] und (17,26) zusammen. Sie enthält demnach 6 reelle Parameter, also genau so viele wie eine Lorentz-Transformation. In der Tat handelt es sich hier um eine besonders einfache Darstellung der Lorentz-Transformationen; der Parameter $A$ allein erzeugt eine spezielle Lorentz-Transformation (Pseudodrehung in der durch $l^a$ und $k^a$ aufgespannten $z,t$-Ebene), der Parameter $C$ eine Drehung in der $t^a,\bar{t}^a$- ($-x,y$) Ebene und der Parameter $B$ eine sogenannte *Nulldrehung*.

*Geodätische Nullkongruenzen und Zerlegung von* $k_{a;b}$. Lichtstrahlen und, wie wir später sehen werden, auch die durch Gravitationsfelder induzierten Nullvektorfelder führen auf *geodätische* Nullvektorfelder; nur solche wollen wir deshalb im folgenden betrachten.

Eine Schar von Nullgeodäten können wir durch

$$x^a = x^a(y^\nu, v) \tag{17,29}$$

beschreiben; dabei unterscheidet $y^\nu$ die verschiedenen Geodäten, und $v$ ist ein affiner Parameter längs einer festen Geodäten, d. h. ein Parameter, bei dessen Benutzung der Tangentenvektor

$$k^a = \frac{\partial x^a}{\partial v}, \qquad k^a k_a = 0 \tag{17,30}$$

der Gleichung

$$\dot{k}_a \equiv k_{a;b} k^b = 0 \tag{17,31}$$

genügt. Durch diese Forderungen ist der affine Parameter $v$ nicht eindeutig bestimmt; vielmehr ist längs jeder Nullgeodäte noch eine lineare Transformation

$$v' = A^{-1}(y^\alpha)\, v + D(y^\alpha) \tag{17,32}$$

möglich, die einem Übergang

$$k'^a = A k^a \tag{17,33}$$

entspricht.

Wir zerlegen nun die kovariante Ableitung $k_{i;n}$ eines geodätischen Nullvektorfeldes mit Hilfe des Projektionstensors

$$p_{ab} = t_a \bar{t}_b + \bar{t}_a t_b = g_{ab} + l_a k_b + k_a l_b \tag{17,34}$$

in die Komponenten *in* der durch $t_a$ und $\bar{t}_a$ (lokal) aufgespannten Ebene und die dazu senkrechten Komponenten. Bei Berücksichtigung von (17,30) und (17,31) erhalten wir

$$k_{i;n} = A_{in} + a_i k_n + k_i b_n \tag{17,35}$$

mit

$$\begin{aligned} &A_{in} = k_{a;b} p^a_i p^b_n = 2\,\mathrm{Re}\,[(\Theta + \mathrm{i}\omega)\, \bar{t}_i t_n - \sigma \bar{t}_i \bar{t}_n],\\ &a_i k^i = 0, \qquad b_i k^i = 0, \qquad \Theta,\ \omega \text{ reell, } \sigma \text{ komplex.} \end{aligned} \tag{17,36}$$

Trotz der Willkür in der Einführung der Vektoren $t_a$ und $\bar{t}_a$ (bei fest vorgegebenem $k^a$) kennzeichnen die aus dem antisymmetrischen bzw. dem symmetrisch-spurfreien Anteil bzw. der Spur von $A_{in}$ gebildeten Invarianten

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\tfrac{1}{2} A_{[nr]} A^{nr}} = \sqrt{\tfrac{1}{2} k_{[n;r]} k^{n;r}},\\ |\sigma| &= \sqrt{\tfrac{1}{2} [A_{(nm)} A^{nm} - \tfrac{1}{2} (A^n_n)^2]} = \sqrt{\tfrac{1}{2} [k_{(n;r)} k^{n;r} - \tfrac{1}{2} (k^i{}_{;i})^2]},\\ \Theta &= \tfrac{1}{2} A^n{}_n = \tfrac{1}{2} k^i{}_{;i} \end{aligned} \tag{17,37}$$

das Vektorfeld in eindeutiger Weise, da sie sich ausschließlich durch $k_{n;i}$ ausdrücken lassen. Bei fester Weltlinienkongruenz, aber Umeichung des zugeordneten Nullvektorfeldes gemäß (17,33) erhalten die Invarianten (17,37) ebenfalls den Faktor $A$.

*Die physikalische Interpretation der Zerlegung von $k_{i;n}$ — die optischen Skalare $\Theta$, $\omega$, $\sigma$.* Wir fixieren ein Element der Nullgeodätenschar (17,29), die wir jetzt Lichtstrahlen nennen wollen, und betrachten den Verbindungsvektor

$$\delta x^a = \frac{\partial x^a(y^\nu, v)}{\partial y^\alpha} \delta y^\alpha \tag{17,38}$$

zu den benachbarten Lichtstrahlen. Die benachbarten Lichtstrahlen bilden offensichtlich eine dreiparametrige Schar; aus dieser Schar sondern wir durch die Forderung

$$k_a \delta x^a = 0 \tag{17,39}$$

eine zweiparametrige Schar aus. Gl. (17,39) bringt zum Ausdruck, daß $\delta x^a$ ein raumartiger Vektor ist; im Ruhesystem dieses Vektors gilt dann wegen $\delta x^a = (\delta \boldsymbol{r}, 0)$ und $k^a = (\boldsymbol{k}, k^4)$

$$\boldsymbol{k}\, \delta \boldsymbol{r} = 0, \tag{17,40}$$

d. h., die dreidimensionalen Lichtstrahlen dieser Schar stehen senkrecht auf dem Verbindungsvektor $\delta \boldsymbol{r}$. In einem beliebigen Koordinatensystem können wir den zu den Lichtstrahlen senkrechten Anteil des durch (17,39) eingeschränkten Verbindungsvektors durch

$$\delta_\perp x^a = p^a_b\, \delta x^b \tag{17,41}$$

definieren

Wir wollen jetzt berechnen, wie sich $\delta_\perp x^a$ beim Fortschreiten längs der Lichtstrahlen ändert, oder anschaulich gesprochen, wie sich der Schatten, den die Lichtstrahlen auf einen senkrecht zu ihnen gestellten Schirm werfen, vom „Gegenstand" $\delta_\perp x^a$ unterscheidet (vgl. Abb. 17.3).

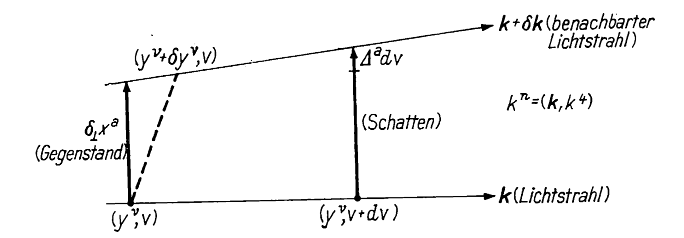



Abb. 17.3
Dreidimensionale Skizze zur Deutung der optischen Skalare

Die gesuchte Größe

$$\Delta^a = p^a_b (p^b_i \delta x^i)_{;n} k^n \tag{17,42}$$

können wir leicht berechnen, indem wir die aus

$$(\delta x^i)_{,n} k^n = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial v} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\alpha\, \partial v} \delta y^\alpha = \frac{\partial k^i}{\partial y^\alpha} \delta y^\alpha = \frac{\partial k^i}{\partial x^n} \delta x^n$$

folgende Gleichung

$$(\delta x^i)_{;n} k^n = k_{i;n}\, \delta x^n \tag{17,43}$$

benutzen und die Beziehungen (17,25), (17,31), (17,35), (17,36) und (17,39) beachten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Delta^a &= A^a{}_i \delta_\perp x^i = 2\,\mathrm{Re}\,[(\Theta + \mathrm{i}\omega)\,\bar{t}_i t^a - \sigma \bar{t}_i \bar{t}^a]\,\delta_\perp x^i \\ &= \Theta \delta_\perp x^a + \mathrm{i}\omega(\bar{t}_i t^a - t_i \bar{t}^a)\,\delta_\perp x^i - 2\,\mathrm{Re}\,[\sigma \bar{t}_i \bar{t}^a]\,\delta_\perp x^i. \qquad (17,44)\end{aligned}$$

Die drei optischen Skalare $\Theta$, $\omega$ und $\sigma$ können also folgendermaßen anschaulich gedeutet werden:

1. Der $\omega$ zugeordnete antisymmetrische Anteil von $A_{ai}$ erzeugt einen Differenzvektor $\Delta^a$, der senkrecht zu $\delta_\perp x^a$ steht; da dann der Schatten gegenüber dem Gegenstand verdreht ist, nennt man $\omega$ den *Drill* oder die *Rotation* der Lichtstrahlen. Innerhalb des Gültigkeitsbereiches der geometrischen Optik ist $k_a$ immer hyperflächennormal, so daß $\omega$ verschwindet; Anordnungen mit $\omega \neq 0$ lassen sich deshalb in einfacher Weise nur durch verdrillte Lichtkabel realisieren.

2. Der $\sigma$ zugeordnete symmetrisch-spurfreie Anteil von $A_{ai}$ erzeugt als Schatten eines Kreises eine flächengleiche Ellipse; die Verkürzung (Streckung) der Achsen wird durch $|\sigma|$ bestimmt, während aus der Phase von $\sigma$ die Lage der Ellipsenachsen folgt. Man nennt $\sigma$ die *Scherung* der Nullkongruenz.

3. Die $\Theta$ zugeordnete Spur von $A_{ai}$ erzeugt einen Schatten, der gegenüber dem Gegenstand richtungsunabhängig verkleinert oder vergrößert ist. Man nennt $\Theta$ deshalb die *Expansion* der Lichtstrahlen. Musterbeispiel einer Schar mit $\Theta \neq 0$ sind die von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Strahlen. Da im flachen Raum für diese Strahlen $\Theta = 1/r$ gilt (vgl. Abb. 17,4), benutzt man $\Theta$ im gekrümmten Raum, um durch

$$\Theta = 1/r_{\mathrm{P}} \qquad (17,45)$$

einen Parallaxenabstand $r_{\mathrm{P}}$ zu definieren.

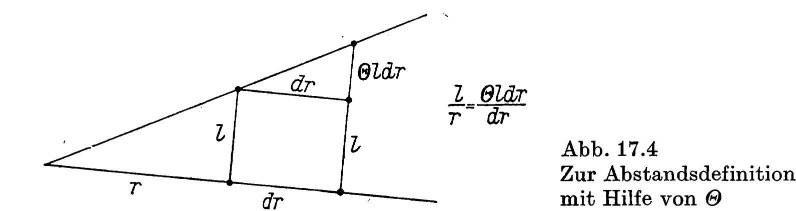



Abb. 17.4
Zur Abstandsdefinition mit Hilfe von $\Theta$

*Spezialfälle und angepaßte Koordinatensysteme.* Bei Rechnungen mit Nullvektorfeldern benutzt man oft Koordinatensysteme, in denen

$$k^i = (0, 0, k^3, 0) \qquad (17,46)$$

gilt. Ist $k_i$ hyperflächennormal (verschwindet $\omega$), kann man gleichzeitig mit (17,46)

$$\begin{aligned} k_i &= \lambda u_{,i} = (0, 0, 0, k_4), \\ \mathrm{d}s^2 &= g_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B + 2m_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}u, \qquad A, B = 1, 2 \end{aligned} \qquad (17,47)$$

erreichen. Ein Vergleich von (17,47) mit der Gestalt $k_i = (0, 0, \lambda, -\lambda)$ eines Nullvektors im Minkowski-Raum zeigt, daß $u$ die Bedeutung einer retardierten Zeit hat, z. B. $u = z - ct$.

Für ebene Wellen mit $k_{a;b} = 0$ verschwinden alle drei optischen Skalare, in Übereinstimmung mit der anschaulichen Deutung dieser Größen.

*Literatur zu Kapitel 17.:*

[7], [56], [124], [125], [141], [184].

# 18.* Die Petrow-Klassifizierung

## 18.1. Was ist Petrow-Klassifizierung?

Die Petrow-Klassifizierung ist die Einteilung Riemannscher Räume nach den algebraischen Eigenschaften des durch

$$\begin{aligned} C^{ai}{}_{sq} = R^{ai}{}_{sq} - \tfrac{1}{2}\,(g^a_s R^i_q + g^i_q R^a_s - g^i_s R^a_q - g^a_q R^i_s) \\ + \tfrac{1}{6}\,R(g^a_s g^i_q - g^i_s g^a_q) \end{aligned} \tag{18,1}$$

definierten Weyl-Tensors (konformen Krümmungstensors).

Aus anderen Gebieten der Physik weiß man, daß algebraische Eigenschaften von Tensoren mit wichtigen physikalischen Eigenschaften verknüpft sind. So führt z. B. in der Kristalloptik die Einteilung der Medien nach der Anzahl der verschiedenen Eigenwerte des $\varepsilon$-Tensors auf die Einteilung in optisch zweiachsige, einachsige oder isotrope Kristalle. Es besteht also die Hoffnung, durch Untersuchung der algebraischen Struktur des Krümmungstensors auch physikalisch interessante Beziehungen zu finden.

Die Untersuchung des Konformtensors reicht natürlich nicht aus, wenn man alle algebraischen Eigenschaften des Krümmungstensors bestimmen will. Die fehlende Information steckt im Ricci-Tensor oder (wegen der Feldgleichungen) im Energieimpulstensor. Wir werden uns hier aber auf die Diskussion des Weyl-Tensors beschränken, der ja für Vakuumfelder mit dem Krümmungstensor übereinstimmt: Petrow-Klassifizierung ist die Einteilung der Vakuumgravitationsfelder nach den algebraischen Eigenschaften des Krümmungstensors.

Beginnen werden wir mit der algebraischen Klassifizierung elektromagnetischer Felder (antisymmetrischer Tensoren 2. Stufe), die viele formale und inhaltliche Analogien zur Petrow-Klassifizierung hat, aber einfacher ist. Die Petrow-Klassifizierung selbst werden wir dann unter Hinweis auf diese Analogien in relativ knapper Form darstellen.

## 18.2. Die algebraische Klassifizierung elektromagnetischer Felder

Versucht man, in Analogie zum Vorgehen bei der Klassifizierung symmetrischer Tensoren auch antisymmetrische Tensoren $F_{in}$ durch ihre Eigenwerte $\lambda$ und Eigenvektoren $s_i$ zu charakterisieren,

$$F_{in}s^n = \lambda s_i, \tag{18,2}$$

dann sieht man (durch Überschieben mit $s^i$) schnell, daß entweder die Eigenwerte verschwinden oder die Eigenvektoren Nullvektoren sein müssen (vgl. Abschnitt 4.5.). Dies deutet schon darauf hin, daß Nullvektoren eine besondere Rolle spielen werden und ihre Benutzung empfehlenswert ist.

*Sachs-Beine und selbstduale Bivektoren.* Aus den zwei reellen und zwei komplexen Nullvektoren $k_i$, $l_i$ und $t_i$, $\bar{t}_i$ eines Sachs-Beins (17,25) lassen sich alle antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe (Bivektoren) aufbauen. Eine besondere Rolle spielen jedoch die Kombinationen

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \bar{t}_a l_b - \bar{t}_b l_a \\ V_{ab} &= k_a t_b - k_b t_a \\ W_{ab} &= t_a \bar{t}_b - t_b \bar{t}_a - k_a l_b + k_b l_a \end{aligned} \tag{18,3}$$

der Sachs-Bein-Vektoren. Diese Bivektoren sind selbstdual in dem Sinn, daß sie sich bei Dualisierung bis auf einen Vorfaktor reproduzieren:

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_{ab} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{abpq} U^{pq} = -\mathrm{i}\, U_{ab} \\ &\tilde{V}_{ab} = -\mathrm{i}\, V_{ab}, \qquad \tilde{W}_{ab} = -\mathrm{i}\, W_{ab}. \end{aligned} \tag{18,4}$$

Diese Beziehungen kann man beweisen, indem man z. B. benutzt, daß der antisymmetrische Tensor $\varepsilon_{abpq} l^p \bar{t}^q$ bei Überschieben mit $l^a$ oder $\bar{t}^a$ Null gibt, wegen (17,25), also aus den Vektoren $l^a$ und $\bar{t}^a$ aufgebaut sein muß, und daß für die Vektoren des Sachsbeins (nachprüfbar im lokalen Minkowskisystem $k^a\sqrt{2} = (0, 0, 1, 1)$, $l^a\sqrt{2} = (0, 0, -1, 1)$, $t^a\sqrt{2} = (1, -\mathrm{i}, 0, 0)$)

$$\varepsilon_{abpq} k^a l^b t^p \bar{t}^q = -\mathrm{i} \tag{18,5}$$

gilt.

Die selbstdualen Bivektoren haben — wegen ihrer Definition (18,3) und der Eigenschaften (17,25) der Nullvektoren — die „Skalarprodukte"

$$\begin{aligned} &W_{ab} W^{ab} = -4, \qquad U_{ab} V^{ab} = 2 \\ &W_{ab} V^{ab} = W_{ab} U^{ab} = V_{ab} V^{ab} = U_{ab} U^{ab} = 0. \end{aligned} \tag{18,6}$$

*Entwicklung des Feldstärketensors nach den selbstdualen Bivektoren.* Natürlich läßt sich der nicht selbstduale Feldstärketensor $F_{ab}$ eines Maxwell-Feldes nicht nach den selbstdualen Bivektoren (18,3) entwickeln. Man kann jedoch diesem reellen Feldstärketensor $F_{ab}$ einen komplexen Feldstärketensor $\Phi_{ab}$ durch

$$\Phi_{ab} = F_{ab} + \mathrm{i}\,\tilde{F}_{ab} = F_{ab} + \frac{i}{2}\,\varepsilon_{abpq} F^{pq} \tag{18,7}$$

zuordnen. Wegen der für jeden antisymmetrischen Tensor gültigen Relation $\tilde{\tilde{F}}_{ab} = -F_{ab}$ ist $\Phi_{ab}$ selbstdual in dem oben benutzten Sinn:

$$\tilde{\Phi}_{ab} = \tilde{F}_{ab} - \mathrm{i}\, F_{ab} = -\mathrm{i}\, \Phi_{ab}, \tag{18,8}$$

und läßt sich infolgedessen nach den Bivektoren $U$, $V$ und $W$ entwickeln:

$$\Phi_{ab} = \varphi_0 U_{ab} + \varphi_1 W_{ab} + \varphi_2 V_{ab}. \tag{18,9}$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\varphi_i$ können wegen (18,6) gemäß

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \tfrac{1}{2}\,\Phi_{ab}V^{ab} &&= F_{ab}V^{ab} &&= B_y - E_x + \mathrm{i}\,(E_y + B_x), \\ \varphi_1 &= -\tfrac{1}{4}\,\Phi_{ab}W^{ab} &&= -\tfrac{1}{2}\,F_{ab}W^{ab} &&= E_z - \mathrm{i}B_z, \\ \varphi_2 &= \tfrac{1}{2}\Phi_{ab}U^{ab} &&= F_{ab}U^{ab} &&= E_x + B_y + \mathrm{i}\,(E_y - B_x) \end{aligned} \tag{18,10}$$

aus dem Feldstärketensor berechnet werden (die jeweils letzte Gleichung jeder Zeile gilt in dem schon mehrfach benutzten lokalen Minkowski-System). Entsprechend den 6 unabhängigen Komponenten eines antisymmetrischen Tensors 2. Stufe treten 3 komplexe Entwicklungskoeffizienten auf.

*Die Klassifizierung elektromagnetischer Felder — 1. Formulierung.* Symmetrische Tensoren werden besonders einfach, wenn man eine Hauptachsentransformation durchführt. Die analoge Aufgabenstellung für antisymmetrische Tensoren besteht darin, durch Wahl der $k^a$-Richtung des Sachs-Beins, also durch Anpassung des Sachs-Beins an den gerade betrachteten antisymmetrischen Tensor, die Entwicklung (18,9) zu vereinfachen.

Da sich bei einer Drehung (17,27) der $k^a$-Richtung, also bei

$$k'^a = k^a + E\bar{E}l^a + \bar{E}t^a + E\bar{t}^a,$$
$$l'^a = l^a, \qquad t'^a = t^a - El^a$$

die selbstdualen Bivektoren gemäß

$$\begin{aligned} W'_{ab} &= W_{ab} - 2EU_{ab}, \\ V'_{ab} &= V_{ab} - EW_{ab} + E^2U_{ab}, \\ U'_{ab} &= U_{ab} \end{aligned} \tag{18,11}$$

transformieren, gilt für die Entwicklungskoeffizienten

$$\varphi_0 = \varphi_0' - 2E\varphi_1' + E^2\varphi_2', \qquad \varphi_1 = \varphi_1' - E\varphi_2', \qquad \varphi_2 = \varphi_2'. \tag{18,12}$$

Wir können also durch geeignete Wahl von $E$, d. h. durch geeignete Wahl der neuen $k^a$-Richtung, einen der Koeffizienten $\varphi_0$ oder $\varphi_1$ zum Verschwinden bringen und damit die Entwicklung (18,9) vereinfachen. Da nur $\varphi_0$ bei den Transformationen (17,26), die $k^a$ fest lassen, aber $l^a$ und $t^a$ ändern, invariant bleibt und wir eine möglichst invariante Wahl treffen wollen, fordern wir das Verschwinden von $\varphi_0$:

$$\varphi_0' - 2\varphi_1'E + \varphi_2'E^2 = 0. \tag{18,13}$$

Je nach der Anzahl der Wurzeln $E$ dieser Gleichung (und unter Beachtung einiger Spezialfälle) kann man die elektromagnetischen Felder in zwei Klassen einteilen.

Felder, für deren Feldstärketensor

$$\varphi_1'^2 - \varphi_2'\varphi_0' \neq 0 \tag{18,14}$$

gilt, heißen nichtentartet. Sie besitzen zwei verschiedene Richtungen $k^a$, für die $\varphi_0$ verschwindet, da entweder (18,13) zwei verschiedene Wurzeln $E$ hat oder (für $\varphi_2' = 0$) zwar nur eine Wurzel $E$ existiert, aber $l^a$ eine der ausgezeichneten Nullrichtungen ist und man durch die Umbenennung $l^a \leftrightarrow -k^a$, $U_{ab} \leftrightarrow \overline{V}_{ab}$ ebenfalls $\varphi_0 = 0$ erreicht.

Felder, deren Feldstärketensor

$$\varphi_1'^2 - \varphi_2'\varphi_0' = 0 \tag{18,15}$$

erfüllt, heißen entartete Felder oder Nullfelder. Sie besitzen nur eine Nullrichtung $k^a$ mit $\varphi_0 = 0$, da entweder (18,13) eine Doppelwurzel $E$ hat oder (für $\varphi_2' = \varphi_1' = 0$) $k'^a$ schon zu $\varphi_0' = 0$ führt. Hat man $\varphi_0 = 0$ erreicht, verschwindet wegen (18,15) auch $\varphi_1$.

An der aus (18,6) und (18,9) folgenden Beziehung

$$\varphi_1^2 - \varphi_2\varphi_0 = -4\Phi_{ab}\Phi^{ab} = -2\,(F_{ab}F^{ab} + \mathrm{i}\,F_{ab}\tilde{F}^{ab}) \tag{18,16}$$

sieht man besonders deutlich, daß die soeben durchgeführte Klassifizierung elektromagnetischer Felder unabhängig von der Wahl des Sachs-Beins und der Interpretation durch die Bivektorentwicklung ist.

Gl. (18,16) gibt darüber hinaus eine einfache Vorschrift zur Feststellung des Typs eines elektromagnetischen Feldes: Ein Maxwell-Feld ist genau dann entartet oder ein Nullfeld, wenn seine beiden Invarianten verschwinden, wenn also

$$F_{ab}F^{ab} = 0 = F_{ab}\tilde{F}^{ab} \tag{18,17}$$

gilt.

*Die Klassifizierung elektromagnetischer Felder — 2. Formulierung.* Man kann die eben vorgenommene Klassifizierung auch in die gewohntere Sprache der Eigenwertgleichungen und Eigenvektoren übersetzen. Wie man aus (18,9) und (18,3) abliest, ist $\varphi_0 = 0$ gleichwertig zu

$$\Phi_{ab}k^b = (F_{ab} + \mathrm{i}\,\tilde{F}_{ab})\,k^b = \varphi_1 k_a. \tag{18,18}$$

Nichtentartete Felder besitzen also zwei verschiedene Nulleigenvektoren $k^a$, für die (18,18) oder

$$k_{[c}F_{a]b}k^b = 0 = k_{[c}\tilde{F}_{a]b}k^b \tag{18,19}$$

gilt.

Entartete Felder (Nullfelder), für die $\varphi_0$ und $\varphi_1$ verschwinden, besitzen nur eine Nulleigenvektor $k^a$ mit

$$F_{ab}k^b = 0 = \tilde{F}_{ab}k^b. \tag{18,20}$$

Ihr Feldstärketensor hat die einfache Struktur $\Phi_{ab} = \varphi_2 V_{ab}$, d. h.

$$F_{ab} = k_a p_b - k_b p_a, \qquad p_a k^a = 0 = p_a l^a. \tag{18,21}$$

## 18.3. Die physikalische Interpretation elektromagnetischer Nullfelder

Das einfachste Beispiel eines elektromagnetischen Nullfeldes ist eine ebene Welle im Minkowski-Raum

$$\begin{aligned} A_n &= \mathrm{Re}\,\{\hat{p}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r x^r}\}, \qquad \hat{p}_n k^n = 0, \qquad k_n k^n = 0, \\ F_{nm} &= \mathrm{Re}\,\{(\hat{p}_m k_n - \hat{p}_n k_m)\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r x^r}\}. \end{aligned} \tag{18,22}$$

Man bestätigt leicht, daß die notwendige und hinreichende Bedingung (18,17) des Verschwindens der Invarianten erfüllt ist.

Ebene Wellen (Nullfelder) treten auch als Fernfelder inselartiger Ladungs- und Stromverteilungen auf. Geht man von der quellenmäßigen Darstellung

$$A_n(x^\alpha, t) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{j_n(y^\alpha, t - r'/c)}{r'} \, d^3y, \qquad r'^2 = (x^\alpha - y^\alpha)(x_\alpha - y_\alpha) \tag{18,23}$$

des Viererpotentials aus und entwickelt den zugehörigen Feldstärketensor nach Potenzen von $1/r$,

$$F_{nm} = \overset{1}{F}_{nm}/r + \overset{2}{F}_{nm}/r^2 + \ldots, \qquad r^2 = x^\alpha x_\alpha \tag{18,24}$$

dann sieht man, daß $\overset{1}{F}_{mn}$ die Struktur

$$\overset{1}{F}_{nm} = p_m k_n - p_n k_m \tag{18,25}$$

hat mit

$$p_m = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int j_m(y^\alpha, t - r'/c) \, d^3y,$$

$$k_n = -(t - r'/c)_{,n} = \left(\frac{x_\alpha - y_\alpha}{r'c}, -\frac{1}{c}\right) \approx (x_\alpha/rc, -1/c), \tag{18,26}$$

$$k_n k^n = 0, \qquad A^n{}_{,n} \approx p^n k_n = 0.$$

Der Energieimpulstensor (8,34) eines allgemeinen Nullfeldes hat die einfache Gestalt

$$T_{mn} = F^a{}_m F_{an} = p_i p^i k_m k_n. \tag{18,27}$$

In einem lokalen Minkowski-System besteht also zwischen Energiestromdichte (Poynting-Vektor) $S^\nu = cT^{4\nu}$ und Energiedichte $w = T^{44}$ die Beziehung $|S^\nu| = wc$. Die Energiestromdichte ist so groß, als ob sich die gesamte Feldenergie mit Lichtgeschwindigkeit bewegt: Elektromagnetische Nullfelder sind „reine" Strahlungsfelder.

Das Nulleigenvektorfeld $k_a(x^i)$ eines entarteten elektromagnetischen Feldes hat einige besondere Eigenschaften, die sich aus den Maxwell-Gleichungen ableiten lassen. Für entartete Felder gilt ja $\Phi_{ab} = \varphi_2 V_{ab}$, und die Feldgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \Phi^{ab}{}_{;b} &= [\varphi_2(k^a t^b - k^b t^a)]_{;b} \\ &= (\varphi_2 k^a)_{;b} t^b + \varphi_2 k^a t^b{}_{;b} - (\varphi_2 k^b)_{;b} t^a - \varphi_2 k^b t^a{}_{;b} = 0. \end{aligned} \tag{18,28}$$

Überschiebt man diese Gleichung mit $k_a$ und beachtet $k^a k_a = 0 = k^a k_{a;b}$ und $k_a t^a{}_{;b} = -k_{a;b} t^a$, so erhält man

$$k_{a;b} t^a k^b = 0, \tag{18,29}$$

d. h.

$$k_{a;b} k^b = \lambda k_a. \tag{18,30}$$

Wie ein Vergleich mit (17,7) zeigt, handelt es sich wegen (18,30) um ein geodätisches Vektorfeld. Überschieben von (18,28) mit $t_a$ gibt

$$k_{a;b} t^a t^b = 0, \tag{18,31}$$

die Scherung $\sigma$ der Weltlinienkongruenz verschwindet (vgl. Abschnitt (17,36)).

Zusammenfassend können wir also feststellen: Nullfelder (entartete elektromagnetische Felder) sind Verallgemeinerungen ebener Wellen; sie treten als Fernfelder von isolierten Strahlungsquellen auf und sind lokal als reine Strahlungsfelder interpretierbar. Ihre Eigenvektorfelder sind geodätisch und scherungsfrei.

### 18.4. Die algebraische Klassifizierung von Gravitationsfeldern

*Die Entwicklung des Weyl-Tensors nach selbstdualen Bivektoren.* Dem Weyl-Tensor $C_{arsq}$ eines Gravitationsfeldes kann der — dem komplexen Feldstärketensor $\Phi_{ab}$ analoge — Tensor

$$\overset{*}{C}_{arsq} = C_{arsq} + \mathrm{i}\,\tilde{C}_{arsq} = C_{arsq} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon_{sqmn}C_{ar}{}^{mn} \tag{18,32}$$

zugeordnet werden. Dieser Tensor ist offensichtlich bezüglich der beiden hinteren Indizes selbstdual:

$$\tilde{\overset{*}{C}}_{arsq} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{sqmn}\overset{*}{C}_{ar}{}^{mn} = -\,\mathrm{i}\,\overset{*}{C}_{arsq}\,. \tag{18,33}$$

Da wegen der Definitionsgleichung (18,1) des Weyl-Tensors seine Verjüngung verschwindet,

$$C^{ar}{}_{aq} = 0\,, \tag{18,34}$$

hat der Weyl-Tensor (im Unterschied zum Krümmungstensor eines beliebigen Raumes) die Eigenschaft, daß die bezüglich des vorderen bzw. des hinteren Indexpaares gebildeten Dualtensoren übereinstimmen:

$$\tilde{}\tilde{C}_{arsq} = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_{arik}\varepsilon_{sqmn}C^{ikmn} = -C_{arsq}\,, \tag{18,35}$$

vgl. Formeln (4,28) und (4,53). Der Tensor $\overset{*}{C}_{arsq}$ ist also automatisch auch bezüglich des vorderen Indexpaares selbstdual und läßt sich vollständig nach den selbstdualen Bivektoren (18,3) entwickeln:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\overset{*}{C}_{arsq} = {}& \Psi_0' U_{ar}U_{sq} + \Psi_1'(U_{ar}W_{sq} + W_{ar}U_{sq})\\ &+ \Psi_2'(U_{ar}V_{sq} + V_{ar}U_{sq} + W_{ar}W_{sq})\\ &+ \Psi_3'(V_{ar}W_{sq} + W_{ar}V_{sq}) + \Psi_4' V_{ar}V_{sq}\,.\end{aligned} \tag{18,36}$$

In dieser Entwicklung wurden die Symmetrieeigenschaften des Weyl-Tensors schon berücksichtigt; die 10 algebraisch unabhängigen Komponenten werden durch die 5 komplexen Koeffizienten $\Psi_A'$ ausgedrückt.

Die ursprüngliche Petrowsche Klassifizierung (1954) bestand im wesentlichen in einer Typeneinteilung des selbstdualen Tensors $\overset{*}{C}_{arsq}$ nach der Zahl der durch

$$\tfrac{1}{2}\overset{*}{C}_{arsq}Q^{sq} = \lambda Q_{ar}\,, \qquad \tilde{Q}_{ar} = -\mathrm{i}\,Q_{ar} \tag{18,37}$$

definierten Eigenbivektoren $Q_{ar}$. Wir wollen hier einen etwas anderen Weg gehen und geben deshalb das Petrowsche Resultat ohne Beweis an: Typ *I* (Spezialfälle *D*, *O*) liegt vor, wenn es drei Eigenbivektoren gibt, Typ *II* (Spezialfall *N*) besitzt zwei Eigenbivektoren und Typ *III* nur einen Eigenbivektor.

*Die Klassifizierung der Gravitationsfelder — 1. Formulierung.* Durch Anpassung des Sachs-Beins und damit auch der selbstdualen Bivektoren an den jeweils zu untersuchenden Weyl-Tensor kann man die Entwicklung (18,35) vereinfachen und $\Psi_0 = 0$ erreichen; wegen (17,27) und (18,11) hat man dazu die $k^a$-Richtung so zu legen ($E$ so zu bestimmen), daß

$$\Psi_0 = \Psi_0' - 4\Psi_1'E + 6\Psi_2'E^2 - 4\Psi_3'E^3 + \Psi_4'E^4 = 0 \tag{18,38}$$

gilt.

Gleichung (18,38) hat als Gleichung vierten Grades genau 4 Wurzeln $E$ (dies gilt bei entsprechender Interpretation auch in den Sonderfällen: Für $\Psi_4' = 0$, $\Psi_0' \neq 0$ erhält man durch die Umbenennung $l^a \leftrightarrow -k^a$ wieder eine Gleichung vierten Grades, für $\Psi_4' = 0 = \Psi_0'$ ist $E = 0$ eine Doppelwurzel usw.). Diesen 4 Wurzeln entsprechen 4 $k^a$-Richtungen (Eigenvektoren $k^a$) mit $\Psi_0 = 0$. Je nach der Vielfachheit dieser Wurzeln kann man die Riemannschen Räume in die folgenden Typen einteilen:

| | | |
|---|---|---|
| Nichtentartete Felder: | Typ *I*: | vier verschiedene Wurzeln, |
| Entartete Felder: | Typ *II*: | eine Doppelwurzel, zwei Einfachwurzeln |
| | Typ *D*: | zwei Doppelwurzeln |
| | Typ *III*: | eine Dreifachwurzel, eine Einfachwurzel |
| | Typ *N*: | eine Vierfachwurzel |
| | Typ *O*: | Weyl-Tensor verschwindet identisch, alle $\Psi_A'$ sind null. |

Eine Übersicht über die sukzessive Zunahme der Entartung gibt das Penrose-Diagramm (Abb. 18.1); jeder Pfeil bedeutet *eine* zusätzliche Entartung.

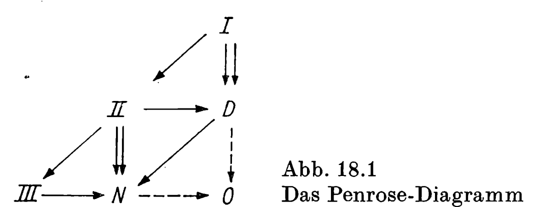



Abb. 18.1
Das Penrose-Diagramm

*Die Klassifizierung der Gravitationsfelder — 2. Formulierung.* Man kann den Umweg über den Tensor $\overset{*}{C}_{arsq}$ vermeiden und die Typen der Gravitationsfelder direkt durch den Weyl-Tensor und seine Nulleigenvektoren $k^a$ kennzeichnen.

Zunächst drückt man die Koeffizienten $\Psi_A$ unter Verwendung von (18,32), (18,34) und (18,4) durch die Produkte des Weyl-Tensors mit den Sachs-Bein-Vektoren aus:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \frac{1}{8}\overset{*}{C}_{arsq}V^{ar}V^{sq} = \frac{1}{4}\,C_{arsq}V^{ar}V^{sq} = C_{arsq}k^a t^r k^s t^q \\
\Psi_1 &= -\frac{1}{16}\,\overset{*}{C}_{arsq}V^{ar}W^{sq} = C_{arsq}k^a t^r k^s l^q \\
\Psi_2 &= \frac{1}{8}\,\overset{*}{C}_{arsq}U^{ar}V^{sq} = -C_{arsq}k^a t^r l^s \bar{t}^q \\
\Psi_3 &= -\frac{1}{16}\,\overset{*}{C}_{arsq}U^{ar}W^{sq} = C_{arsq}l^a \bar{t}^r l^s k^q \\
\Psi_4 &= \frac{1}{8}\,\overset{*}{C}_{arsq}U^{ar}U^{sq} = C_{arsq}l^a \bar{t}^r l^s \bar{t}^q .
\end{aligned} \tag{18,39}$$

Für Nulleigenvektoren $k^a$ verschwindet $\Psi_0$; der reelle symmetrische Tensor

$$S_{rq} = C_{arsq} k^a k^s \tag{18,40}$$

enthält deshalb keine Terme proportional zu $\bar{t}^r \bar{t}^q$ und $t^r t^q$. Da für ihn außerdem infolge (18,34) und der Symmetrieeigenschaften des Weyl-Tensors die Beziehungen

$$S_{rq} k^q = 0, \qquad S^r_r = C_a{}^r{}_{sr} k^a k^r = 0 \tag{18,41}$$

gelten, hat er die Struktur

$$S_{rq} = \alpha k_r k_q + \mathrm{Re}\,[\beta(k_r \bar{t}_q + \bar{t}_r k_q)]\,. \tag{18,42}$$

Eigenvektoren $k^a$ des Weyl-Tensors haben also die Eigenschaft

$$k_{[b} C_{a]rs[q} k_{n]} k^r k^s = 0 \leftrightarrow \Psi_0 = 0\,. \tag{18,43}$$

Fallen zwei Eigenvektoren zusammen ($E = 0$ ist eine Doppelwurzel der Gleichung (18,38)), dann muß außer $\Psi_0$ auch $\Psi_1$ verschwinden; wegen (18,39) folgt daraus $\beta = 0$ und damit

$$k_{[b}\, C_{a]rsq} k^r k^s = 0 \leftrightarrow \Psi_0 = 0 = \Psi_1\,. \tag{18,44}$$

In Fortführung dieser Überlegungen kommt man schließlich zu dem in Tab. 18.1 dargestellten Ergebnis (die beiden letzten Spalten gelten jeweils für den Nulleigenvektor der größten Entartung).

Tabelle 18.1
*Die Petrow-Typen Riemannscher Räume*

| Typ | Vielfachheit der Nulleigenvektoren | Es verschwinden | |
|---|---|---|---|
| *I* | (1, 1, 1, 1) | $\Psi_0$ | $k_{[b}\, C_{a]rs[q} k_{n]} k^r k^s = 0$ |
| *II* | (2, 1, 1) } | $\Psi_0, \Psi_1$ | $k_{[b}\, C_{a]rsq} k^r k^s = 0$ |
| *D* | (2, 2) } | | |
| *III* | (3, 1) | $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ | $k_{[b}\, C_{a]rsq} k^r = 0$ |
| *N* | (4) | $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ | $C_{arsq} k^r = 0$ |
| *O* | Eigenvektoren unbestimmt | alle $\Psi_A$ | $C_{arsq} = 0$ |

Durch Drehung des Sachs-Beins (bei festgehaltenem $k^a$) kann man zusätzlich noch $\Psi_2 = 0$ für Typ *I*, $\Psi_3 = 0$ für Typ *II*, $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$ für Typ *D* (hier gilt immer $3\Psi_2\Psi_4 = 2\Psi_3^2$), $\Psi_4 = 0$ für Typ *III* erreichen.

Um den Petrow-Typ eines gegebenen Raumes zu bestimmen, muß man zunächst den Weyl-Tensor und — mit einem beliebigen Sachs-Bein — gemäß (18,39) die zugehörigen $\Psi'_A$ berechnen. Die Gleichung (18,38) gibt dann die möglichen Transformationen $E$ und damit die Vielfachheit der Nulleigenvektoren.

## 18.5. Die physikalische Interpretation entarteter Vakuum-Gravitationsfelder

Für Vakuumlösungen der Einsteinschen Feldgleichungen sind Weyl-Tensor und Krümmungstensor identisch, so daß alle Aussagen des vorigen Abschnitts auch für den Krümmungstensor gelten.

Das einfachste Beispiel einer entarteten Vakuumlösung sind die in Abschnitt 15.3. behandelten ebenen Gravitationswellen. Wegen

$$R_{abmn}k^n, \qquad k^n k_n = 0 \tag{18,45}$$

sind sie vom Typ $N$. Man könnte also die Vermutung haben, daß entartete Vakuumlösungen mit Gravitationsstrahlung bzw. Gravitationswellen zusammenhängen. In der Tat kann man zeigen, daß der Krümmungstensor einer inselartigen Materialverteilung unter gewissen Voraussetzungen in großer Entfernung von den Quellen eine Entwicklung

$$R_{abmn} = \frac{N_{abmn}}{r} + \frac{III_{abmn}}{r^2} + \frac{D_{abmn}}{r^3} + \ldots \tag{18,46}$$

gestattet, wobei die Symbole $N$, $III$, $D$ auf Tensoren des betreffenden algebraischen Typs hinweisen. Das Fernfeld einer Gravitationsstrahlungsquelle (wenn ein solches existiert) ist also lokal eine ebene Welle (Typ $N$); nähert man sich der Quelle, spalten die vier zunächst zusammenfallenden Nulleigenrichtungen auf (*Peeling-Theorem*). Leider ist dieses Ergebnis nicht so fruchtbar wie das entsprechende der Elektrodynamik, da der Zusammenhang zwischen $N_{abmn}$, $III_{abmn}$, $D_{abmn}$ und den Eigenschaften der Quelle des Feldes nicht bekannt ist.

Aus den Bianchi-Identitäten (6,29), die man hier am besten in der Form

$$\tilde{R}_{ar}{}^{sq}{}_{;q} = 0 \tag{18,47}$$

bzw. ($R_{ab} = 0$!)

$$\overset{*}{R}{}^{arsq}{}_{;q} = 0 \tag{18,48}$$

benutzt, lassen sich zwei einfache Eigenschaften der Nulleigenvektorfelder entarteter Vakuumfelder herleiten; wir wollen dies für den Typ $II$ bzw. $D$ ($\Psi_0 = 0 = \Psi_1$, $\Psi_2 \neq 0$) explizit tun, die Rechnungen für die anderen Typen verlaufen analog.

Wegen

$$V_{ab;q}W^{ab} = 4k_{a;q}t^a \tag{18,49}$$

folgt aus (18,48) und (18,36)

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{*}{R}{}^{arsq}{}_{;q}V_{ar} = (\overset{*}{R}{}^{arsq}V_{ar})_{;q} - \overset{*}{R}{}^{arsq}V_{ar;q} \\ &= 4(\Psi_2 V^{sq})_{;q} - 8V^{sq}k_{a;q}t^a - 2\Psi_2 U^{ar}V^{sq}V_{ar;q} \\ &\quad -8\Psi_2 W^{sq}k_{a;q}t^a . \end{aligned} \tag{18,50}$$

Überschieben mit $k_s$ liefert

$$V^{sq}{}_{;q}k_s + 2k_{a;q}t^a k^q = k_{a;q}t^a k^q = 0, \tag{18,51}$$

d. h., das Vektorfeld $k^a$ ist geodätisch (vgl. Abschnitt 18,3). Überschieben von (18,50) mit $t^s$ führt auf

$$V^{sq}{}_{;q}t^s + 2k_{s;q}t^s t^q = 3k_{s;q}t^s t^q = 0, \tag{18,52}$$

d. h., das Vektorfeld ist außerdem noch scherungsfrei ($\sigma = 0$).

Die mehrfachen Eigenvektoren entarteter Vakuumlösungen bilden also eine geodätische, scherungsfreie Weltlinienkongruenz (wie es auch die Eigenvektoren entarteter elektromagnetischer Felder tun). Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung (*Goldberg-Sachs-Theorem*): Wenn in einer Vakuumlösung eine scherungsfreie geodätische Nullkongruenz existiert, ist diese Lösung entartet, und die Kongruenz ist mehrfache Eigenkongruenz. Dieser Satz wird oft bei der Bestimmung des Petrow-Typs benutzt, da hier schon erste Ableitungen ($k_{a;n}$) eine Aussage geben, während der Typ allgemein erst aus dem Krümmungstensor (zweite Ableitungen) bestimmbar ist.

Als Beispiel dafür betrachten wir die Schwarzschild-Metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\lambda}\, dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - e^{-\lambda} c^2\, dt^2 \\ e^{-\lambda} &= 1 - 2M/r. \end{aligned} \qquad (18{,}53)$$

Ein dem Koordinatensystem angepaßtes Sachs-Bein bilden die Vektoren

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\, k_a &= (e^{\lambda/2}, 0, 0, e^{-\lambda/2}) \\ \sqrt{2}\, l_a &= (-e^{\lambda/2}, 0, 0, e^{-\lambda/2}) \\ \sqrt{2}\, t_a &= (0, r, -i\, r \sin\vartheta, 0), \end{aligned} \qquad (18{,}54)$$

für die man leicht die Relationen (17,25) bestätigt. Da von den partiellen Ableitungen von $k_a$ nur $k_{1,1}$ und $k_{4,1}$ von Null verschieden sind, folgt (unter Verwendung der Christoffel-Symbole (10,7) mit $\lambda = -\nu$, $\dot{\lambda} = 0$)

$$\begin{aligned} k_{a;q} t^a k^q &= -\Gamma^c_{aq} t^a k^q k_c = 0 \\ k_{a;q} t^a t^q &= -\Gamma^c_{aq} t^a t^q k_c = k_1(\Gamma^1_{22} t^2 t^2 + \Gamma^1_{33} t^3 t^3) = 0, \end{aligned} \qquad (18{,}55)$$

und auch für $l_a$ findet man dieselben Relationen: $k_a$ und $l_a$ bilden jeweils eine geodätische scherungsfreie Nullkongruenz, sind also beide (zweifache) Nulleigenrichtungen einer entarteten Lösung. Die Existenz von zwei verschiedenen entarteten Nulleigenvektoren bedeutet aber, daß die Schwarzschild-Lösung vom Typ $D$ ist.

Man sieht an diesem Beispiel gut die Vorzüge der Benutzung von Nullvektoren, aber auch die Grenzen der Interpretation von entarteten Lösungen als Gravitationswellen: Die statische Schwarzschildlösung läßt sich nur schwer (stehende, eingefrorene Wellen) als Strahlungsfeld interpretieren.

*Literatur zu Kapitel 18.:*

[18], [56], [152], [153], [184].

# 19. Killing-Vektoren und Bewegungsgruppen

## 19.1. Aufgabenstellung

Bei physikalischen Problemen haben symmetrische Anordnungen nicht nur den Vorzug einer gewissen Einfachheit oder sogar Schönheit, sondern es treten häufig auch besondere physikalische Effekte auf. Man kann deshalb erwarten, daß auch in

der Allgemeinen Relativitätstheorie bei Vorhandensein einer hohen Symmetrie die Feldgleichungen leichter zu lösen sind und darüber hinaus die Lösungen besondere Eigenschaften haben.

Unsere Aufgabe besteht darin, überhaupt erst einmal zu definieren, was wir unter einer Symmetrie eines Riemannschen Raumes verstehen wollen. Der bloße Eindruck der Einfachheit einer Metrik reicht dazu natürlich nicht aus; so hat z. B. die relativ komplizierte Metrik (S. 160) wesentlich mehr Symmetrien als die „einfache" ebene Welle (15,39). Wir müssen vielmehr in koordinatensystemunabhängiger Weise das Vorhandensein einer Symmetrie definieren. Dabei werden wir uns auf kontinuierliche Symmetrien beschränken und diskrete Symmetrieoperationen (z. B. Raumspiegelungen) außer acht lassen.

## 19.2. Killing-Vektoren

Die Symmetrie einer Anordnung im Minkowski-Raum oder im dreidimensionalen (euklidischen) Ortsraum kommt darin zum Ausdruck, daß sich beim Fortschreiten auf bestimmten Linien oder Flächen (z. B. auf Kugelflächen bei Kugelsymmetrie) die physikalischen Größen nicht ändern. Diese anschauliche Vorstellung kann man auf Riemannsche Räume übertragen und dem Raum eine Symmetrie zuschreiben, wenn es in ihm eine $s$-dimensionale ($1 \leqq s \leqq 4$) Mannigfaltigkeit von Punkten gibt, die physikalisch gleichwertig sind: Bei einer Symmetrieoperation, d. h. einer Bewegung, die diese Punkte ineinander überführt, ändert sich die Metrik nicht.

Zu einer exakteren Fassung dieser Vorstellungen gelangt man, wenn man sich in jedem Punkt $x^a$ des Raumes einen Vektor $\xi^i(x^a)$ vorstellt und danach fragt, unter welchen Bedingungen sich die Metrik bei einer Bewegung (beim Fortschreiten) in Richtung von $\xi^i$ nicht ändert. Da man jede endliche Bewegung aus infinitesimalen aufbauen kann, genügt es, die Invarianz der Metrik bei der infinitesimalen Bewegung

$$\bar{x}^a = x^a + \xi^a(x^n)\,\mathrm{d}\lambda = x^a + \delta x^a \tag{19,1}$$

zu sichern. Bei einer solchen Transformation gilt

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= g_{ab,n}\xi^n\,\mathrm{d}\lambda, \\ \delta(\mathrm{d}x^a) &= \mathrm{d}(\delta x^a) = \xi^a{}_{,n}\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}\lambda, \end{aligned} \tag{19,2}$$

so daß die Linienelemente im Punkt $x^a$ und im Nachbarpunkt $\bar{x}^a$ nur dann übereinstimmen können, wenn

$$\begin{aligned} \delta(\mathrm{d}s^2) &= \delta(g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b) \\ &= (g_{ab,n}\xi^n + g_{nb}\xi^n{}_{,a} + g_{an}\xi^n{}_{,b})\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b\,\mathrm{d}\lambda = 0 \end{aligned} \tag{19,3}$$

gilt. Eine Symmetrie liegt genau dann vor, wenn (19,3) unabhängig von der Orientierung der $\mathrm{d}x^a$ erfüllt ist, also für

$$g_{ab,n}\xi^n + g_{nb}\xi^n{}_{,a} + g_{an}\xi^n{}_{,b} = 0. \tag{19,4}$$

Bei vorgegebener Metrik ist (19,4) ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung des Vektorfeldes $\xi^i(x^n)$; wenn es keine Lösung hat, besitzt der Raum keine Symmetrie. Die Gl. (19,4) ist trotz des Auftretens partieller Ableitungen eine kovariante Charakterisierung des Vorhandenseins von Symmetrien. Man sieht dies,

wenn man die partiellen Ableitungen durch die kovarianten ersetzt oder (19,4) mit Hilfe der Lie-Ableitung formuliert: (19,4) ist äquivalent zu der offensichtlich kovarianten Gleichung

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = \underset{\xi}{£} g_{ab} = 0. \tag{19,5}$$

Vektoren $\xi^i$, die Lösungen der Gl. (19,4) oder (19,5) sind, nennt man *Killing-Vektoren*; sie kennzeichnen in invarianter Weise die Symmetrieeigenschaften Riemannscher Räume (KILLING 1892).

Wählt man das Koordinatensystem so, daß $\xi^n$ die Normalform

$$\xi^n = (0, 0, 0, 1) \tag{19,6}$$

hat, dann reduziert sich (19,4) auf

$$\partial g_{ab}/\partial x^4 = 0, \tag{19,7}$$

die Metrik hängt von $x^4$ nicht ab. Man sieht hier deutlich, daß in (19,4) die auch denkbare Definition von Symmetrie als „Unabhängigkeit von einer Koordinate" kovariant verallgemeinert wurde.

Die dem Killing-Vektorfeld zugeordnete Weltlinienkongruenz, d. h. die Schar derjenigen Kurven, die durch Symmetrieoperationen ineinander überführbare Punkte miteinander verbinden, erhält man durch Integration der Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = \xi^n(x^i). \tag{19,8}$$

## 19.3. Killing-Vektoren einiger einfacher Räume

Die Killing-Gleichungen (19,5) sind ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zur Bestimmung der Killing-Vektoren $\xi^i(x^n)$; die Anzahl und die Art der Lösungen dieser 10 Gleichungen sind von der Metrik abhängig und so von Raum zu Raum verschieden. Wir wollen hier zunächst für zwei einfache Metriken die Killing-Vektoren explizit bestimmen und erst im nächsten Abschnitt einige allgemeine Aussagen über die Lösungsmannigfaltigkeit der Killing-Gleichungen ableiten.

Die Killing-Vektoren des Minkowski-Raumes werden sich in kartesischen Koordinaten sicher am einfachsten gewinnen lassen. Da alle Christoffel-Symbole verschwinden, lauten die Killing-Gleichungen in diesen Koordinaten

$$\xi_{a,b} + \xi_{b,a} = 0. \tag{19,9}$$

Kombiniert man die aus (19,9) durch Differenzieren entstehenden Gleichungen

$$\xi_{a,bc} + \xi_{b,ac} = 0, \qquad \xi_{b,ca} + \xi_{c,ba} = 0, \qquad \xi_{c,ab} + \xi_{a,cb} = 0, \tag{19,10}$$

so erhält man

$$\xi_{a,bc} = 0 \tag{19,11}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\xi_a = c_a + \varepsilon_{ab} x^b. \tag{19,12}$$

Die Killing-Gleichungen (19,9) werden von (19,12) aber nur dann befriedigt, wenn

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} \tag{19,13}$$

gilt. Der flache Raum besitzt also 10 linear unabhängige Killing-Vektoren; dabei entsprechen den 4 Konstanten $c_a$ 4 Translationen und den 6 Konstanten $\varepsilon_{ab}$ 6 verallgemeinerte Drehungen (3 räumliche Drehungen und 3 spezielle Lorentz-Transformationen).

Relativ schnell erhält man auch die der Kugelfläche

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 = (dx^1)^2 + \sin^2 x^1\, (dx^2)^2 \tag{19,14}$$

zugeordneten Killing-Vektoren. Die Killing-Gleichung (19,4) lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} &\xi^1{}_{,1} = 0, \qquad \xi^1{}_{,2} + \sin^2\vartheta\,\xi^2{}_{,1} = 0, \\ &\xi^1 \cos\vartheta + \sin\vartheta\,\xi^2{}_{,2} = 0. \end{aligned} \tag{19,15}$$

Die allgemeine Lösung

$$\xi^1 = A \sin(\varphi + a), \qquad \xi^2 = A\cos(\varphi + a)\cot\vartheta + b \tag{19,16}$$

zeigt, daß es drei linear unabhängige Killing-Vektoren gibt, z. B. die Vektoren

$$\begin{aligned} \underset{1}{\xi^a} &= (\sin\varphi,\ \cos\varphi\,\cot\vartheta), \\ \underset{2}{\xi^a} &= (\cos\varphi,\ -\sin\varphi\,\cot\vartheta), \\ \underset{3}{\xi^a} &= (0,\ 1). \end{aligned} \tag{19,17}$$

Die Kugel besitzt also genausoviel Killing-Vektoren wie die Ebene, die ja als Symmetrieoperationen zwei Translationen und eine Drehung gestattet.

## 19.4. Beziehungen zwischen Krümmungstensor und Killing-Vektoren

Aus der Killing-Gleichung (19,5)

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$$

und der für jeden Vektor gültigen Beziehung

$$\xi_{a;b;n} - \xi_{a;n;b} = R^m{}_{abn}\xi_m \tag{19,18}$$

kann man eine Reihe von Beziehungen ableiten, aus denen sich Aussagen über die in einem vorgegebenen Raum mögliche Anzahl von Killing-Vektoren gewinnen lassen.

Wegen der Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors folgt aus (19,18) für jeden Vektor die Identität

$$(\xi_{a;b} - \xi_{b;a})_{;n} + (\xi_{n;a} - \xi_{a;n})_{;b} + (\xi_{b;n} - \xi_{n;b})_{;a} = 0, \tag{19,19}$$

die für Killing-Vektoren

$$\xi_{a;b;n} + \xi_{n;a;b} + \xi_{b;n;a} = 0 \tag{19,20}$$

ergibt und zusammen mit (19,18) und (19,5) auf

$$\xi_{n;b;a} = R^m{}_{abn}\xi_m \tag{19,21}$$

führt.

Diese Gleichung zeigt, daß in einem vorgegebenen Riemannschen Raum aus dem Killing-Vektor $\xi_n$ und seinen ersten Ableitungen $\xi_{n;a}$ alle höheren Ableitungen berechnet werden können. Zur eindeutigen Bestimmung eines Killing-Vektorfeldes reicht es also aus, die Werte von $\xi_n$ und $\xi_{n;a}$ in einem einzigen Punkt vorzugeben. Da man dabei natürlich $\xi_{a;n} = -\xi_{n;a}$ berücksichtigen muß, gibt es in einem $N$-dimensionalen Riemannschen Raum genau $N + \binom{N}{2} = N(N+1)/2$ solcher Anfangswerte und dementsprechend maximal $N(N+1)/2$ linear unabhängige Killing-Vektorfelder. Der physikalische Raum ($N = 4$) hat also höchstens 10 Killing-Vektoren, und — wie wir zeigen werden — 10 nur dann, wenn es ein Raum konstanter Krümmung ist.

Diese Maximalzahl wird in einem vorgegebenen Raum jedoch nicht immer realisiert werden können, da die Killing-Gleichungen nicht für jede Kombination dieser Anfangswerte integrabel sein müssen, es sogar Räume ohne jede Symmetrie gibt. So folgt z. B. aus der Kombination der für jeden Tensor $\xi_{n;b}$ geltenden Gleichung

$$\xi_{n;b;a;i} - \xi_{n;b;i;a} = R^m{}_{nai}\xi_{m;b} + R^m{}_{bai}\xi_{m;n} \tag{19,22}$$

mit (19,21) und der Killing-Gleichung die Beziehung

$$\begin{aligned}&(R^m{}_{abn;i} - R^m{}_{ibn,a})\,\xi_m\\ &+ (R^m{}_{abn}g^k_i - R^m{}_{ibn}g^k_a + R^m{}_{bai}g^k_n - R^m{}_{nai}g^k_b)\,\xi_{m;k} = 0,\end{aligned} \tag{19,23}$$

die die Freiheit in der Vorgabe von $\xi_m$ und $\xi_{m;k}$ weiter einschränkt. Man kann aus den angegebenen Gleichungen einen Algorithmus zur Bestimmung der Anzahl der in einem gegebenen Raum möglichen Killing-Vektorfelder ableiten. Wir wollen die Einzelheiten jedoch hier nicht darstellen und verweisen auf die Spezialliteratur.

Relativ einfach läßt sich die Frage beantworten, welche Räume genau die Maximalzahl $N(N+1)/2$ von Killing-Vektoren besitzen. Für solche Räume darf offensichtlich (19,23) keine Einschränkungen der Werte der $\xi_m$ und $\xi_{m;k}$ bedeuten, d. h., für sie muß (man beachte $\xi_{m;k} + \xi_{k;m} = 0$!)

$$R^m{}_{abp;i} = R^m{}_{ibp;a}, \tag{19,24}$$

$$\begin{aligned}&R^m{}_{abp}g^k_i - R^k{}_{abp}g^m_i - R^m{}_{ibp}g^k_a + R^k{}_{ibp}g^m_a\\ &\quad + R^m{}_{bai}g^k_p - R^k{}_{bai}g^m_p - R^m{}_{pai}g^k_b + R^k{}_{pai}g^m_b = 0\end{aligned} \tag{19,25}$$

gelten.

Da durch Verjüngen über $i$ und $k$ bzw. $i$ und $k$ sowie $a$ und $b$ aus (19,25) die Gleichungen

$$\begin{aligned}&(N-1)\,R^m{}_{abp} = R_{ap}g^m_b - R_{ab}g^m_p\\ &NR^m_p = Rg^m_p\end{aligned} \tag{19,26}$$

entstehen, hat der Krümmungstensor solcher Räume maximaler Symmetrie die Gestalt

$$R_{mabp} = \frac{R}{N(N-1)}\,(g_{ap}g_{mb} - g_{ab}g_{mp}). \tag{19,27}$$

Der Krümmungsskalar $R$ muß wegen (19,24) konstant sein. Man nennt Räume mit diesen Eigenschaften Räume konstanter Krümmung; dabei kann die Krümmung $R/N(N-1)$ positiv, null oder negativ sein. Als Krümmungsradius $K$ bezeichnet man oft die Größe

$$K = \sqrt{N(N-1)/|R|}. \tag{19,28}$$

In Räumen konstanter Krümmung ist kein Punkt und keine Richtung bevorzugt, sie sind homogen und isotrop. Spezialfälle dieser Räume sind flache Räume mit verschwindendem Krümmungstensor.

Wie man leicht zeigen kann, ist ein vierdimensionaler Raum konstanter Krümmung keine Lösung der Vakuumfeldgleichungen, abgesehen von dem trivialen Fall des Minkowski-Raumes. Die Frage nach der Maximalzahl von Killing-Vektoren in Räumen, die Vakuumgravitationsfeldern entsprechen, läßt sich wie folgt beantworten: Vakuumlösungen vom Typ $I$ oder $D$ haben maximal 4 Killing-Vektoren (zu ihnen gehört z. B. die Schwarzschild-Metrik mit einem zeitartigen Killing-Vektor $\xi = (0, 0, 0, 1)$ und den 3 Killing-Vektoren der Kugelsymmetrie); Lösungen vom Typ $N$ haben maximal 6 und Lösungen vom Typ $II$ und $III$ maximal 3 Killing-Vektoren.

## 19.5. Bewegungsgruppen

Das Fortschreiten in Richtung eines Killing-Vektorfeldes kann man auch als Abbildung des Raumes auf sich selbst oder als Bewegung (z. B. Drehung) des Raumes interpretieren. Da wir als Bewegungen genau solche Transformationen bezeichnen, die die Metrik nicht ändern (für die die Metrik im Anfangs- und Endpunkt der Bewegung in einem geeigneten Koordinatensystem übereinstimmt), bilden diese Transformationen eine Gruppe.

Bewegungsgruppen (Liesche Transformationsgruppen) sind kontinuierliche Gruppen, deren Elemente differenzierbare Funktionen einer endlichen Zahl $r$ von Parametern sind. Man kann sich die ganze Gruppe durch wiederholte Anwendung von infinitesimalen Transformationen (19,1) in Richtung der $r$ Killing-Vektoren des Raumes erzeugt denken. Diese (linear unabhängigen) Killing-Vektoren dienen also als Basis zur Erzeugung der Gruppe. Da jede Linearkombination von Killing-Vektoren wieder ein Killing-Vektor ist, ist diese Basis nicht eindeutig bestimmt.

Man kann eine Gruppe (und damit den Raum) charakterisieren durch die Zahl der linear unabhängigen Killing-Vektoren und ihre Eigenschaften. Ein anschauliches Bild von der Wirkungsweise der Gruppe vermitteln die Transitivitätsgebiete. Dies sind diejenigen Gebiete des Raumes, deren Punkte durch die Symmetrieoperationen der Gruppe ineinander überführt werden können. Die Transitivitätsflächen der Drehgruppe sind z. B. Kugelflächen, und die Gruppe ist auf ihnen mehrfach transitiv, d. h., es gibt mehr als eine Transformation, die einen Punkt in einen anderen transformiert.

*Die Strukturkonstanten einer Bewegungsgruppe.* Die Struktur einer Gruppe, die von $r$ Killing-Vektoren erzeugt wird, erkennt man am deutlichsten, wenn man die Frage nach der Vertauschbarkeit infinitesimaler Bewegungen stellt.

Zwei infinitesimale Bewegungen in Richtung der Killing-Vektoren $\underset{A}{\xi}^a$ und $\underset{B}{\xi}^a$, nämlich

$$\bar{x}^a = x^a + \underset{A}{\xi}^a(x^i)\,\mathrm{d}\lambda_A + \underset{A}{F}^a(\mathrm{d}\lambda_A)^2 + \dots \tag{19,29}$$

und

$$\tilde{x}^a = x^a + \underset{B}{\xi}^a(x^i)\,\mathrm{d}\lambda_B + \underset{B}{F}^a(\mathrm{d}\lambda_B)^2 + \dots \tag{19,30}$$

ergeben nacheinander ausgeführt

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{x}}^a &= \bar{x}^a + \underset{B}{\xi}^a(\bar{x}^i)\,\mathrm{d}\lambda_B + \underset{B}{F}^a(\mathrm{d}\lambda_B)^2 + \dots\\ &= x^a + \underset{A}{\xi}^a(x^i)\,\mathrm{d}\lambda_A + \underset{A}{F}^a(\mathrm{d}\lambda_A)^2 + \underset{B}{\xi}^a(x^i)\,\mathrm{d}\lambda_B\\ &\quad + \underset{B}{\xi}^a{}_{,n}(x^i)\,\underset{A}{\xi}^n(x^i)\,\mathrm{d}\lambda_A\,\mathrm{d}\lambda_B + \underset{B}{F}^a(\mathrm{d}\lambda_B)^2 + \dots\end{aligned} \tag{19,31}$$

Führt man die Transformationen in umgekehrter Reihenfolge aus und bildet dann die Differenz beider Ergebnisse, bleiben nur die in $A$ und $B$ antisymmetrischen Anteile von (19,31) übrig:

$$\tilde{\bar{x}}^a - \bar{\tilde{x}}^a = \left(\underset{B}{\xi}^a{}_{,n}\underset{A}{\xi}^n - \underset{A}{\xi}^a{}_{,n}\underset{B}{\xi}^n\right)\mathrm{d}\lambda_A\,\mathrm{d}\lambda_B + \dots \tag{19,32}$$

Infinitesimale Bewegungen sind also nur in erster Ordnung vertauschbar; in zweiter Ordnung bleibt entsprechend (19,32) ein Differenzterm übrig. Wir wissen jedoch, daß sowohl der Punkt $\tilde{\bar{P}}$ (Koordinaten $\tilde{\bar{x}}^a$) als auch der Punkt $\bar{\tilde{P}}$ (Koordinaten $\bar{\tilde{x}}^a$) dem Ausgangspunkt $P$ gleichwertig sind (vgl. Abb. 19.1); wegen der Gruppen-

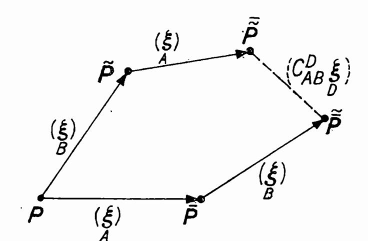



Abb. 19.1
Vertauschung infinitesimaler Bewegungen

eigenschaft der Symmetrietransformationen gibt es also auch eine linear aus den Killing-Vektoren erzeugbare Transformation, die den Übergang von $\tilde{\bar{P}}$ zu $\bar{\tilde{P}}$ beschreibt. Wegen (19,32) gilt dann für diese Transformation

$$\left(\underset{A}{\xi}^n\frac{\partial}{\partial x^n}\underset{B}{\xi}^a - \underset{B}{\xi}^n\frac{\partial}{\partial x^n}\underset{A}{\xi}^a\right) = C^D_{AB}\underset{D}{\xi}^a, \qquad A, B, D = 1, \dots, r. \tag{19,33}$$

Die Größen $C^D_{AB}$ heißen *Strukturkonstanten* der Gruppe; sie sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, hängen aber von der Wahl der Basis $\underset{A}{\xi}^a$ ab und können durch geeignete Basistransformationen vereinfacht (auf gewisse Normalformen gebracht) werden.

Unter Verwendung der Operatoren

$$\underset{A}{X} = \underset{A}{\xi}^n \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{19,34}$$

läßt sich (19,33) auch in der Form

$$\underset{A}{X}\underset{B}{X} - \underset{B}{X}\underset{A}{X} = \left[\underset{A}{X}, \underset{B}{X}\right] = C^D_{AB}\underset{D}{X} \tag{19,35}$$

schreiben.

Man kann zeigen, daß zu beliebig vorgegebenen Strukturkonstanten immer eine Gruppe existiert, wenn diese Konstanten die aus (19,33) ablesbare Antisymmetrieeigenschaft

$$C^D_{AB} = -C^D_{BA} \tag{19,36}$$

haben und die aus der Jacobischen Identität

$$\left[\underset{A}{X}, \left[\underset{B}{X}, \underset{C}{X}\right]\right] + \left[\underset{B}{X}, \left[\underset{C}{X}, \underset{A}{X}\right]\right] + \left[\underset{C}{X}, \left[\underset{A}{X}, \underset{B}{X}\right]\right] = 0 \tag{19,37}$$

folgende Liesche Identität

$$C^E_{AD}C^D_{BC} + C^E_{BD}C^D_{CA} + C^E_{CD}C^D_{AB} = 0 \tag{19,38}$$

erfüllen.

*Beispiele*: Die Gruppe der Translationen

$$\underset{A}{\xi}^a = \delta^a_A, \underset{A}{X} = \delta^a_A \frac{\partial}{\partial x^a}, \qquad a = 1, \ldots, n, \qquad A = 1, \ldots, n \tag{19,39}$$

eines $n$-dimensionalen flachen Raumes ist eine Abelsche Gruppe. Alle ihre Transformationen sind vertauschbar, alle Strukturkonstanten verschwinden.

Die Gruppe der Drehungen eines dreidimensionalen flachen Raumes

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\xi}^a &= (y, -x, 0), & \underset{1}{X} &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},\\
\underset{2}{\xi}^a &= (z, 0, -x), & \underset{2}{X} &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},\\
\underset{3}{\xi}^a &= (0, z, -y), & \underset{3}{X} &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned} \tag{19,40}$$

hat als Kommutatoren

$$\left[\underset{1}{X}, \underset{2}{X}\right] = \underset{3}{X}, \qquad \left[\underset{2}{X}, \underset{3}{X}\right] = \underset{1}{X}, \qquad \left[\underset{3}{X}, \underset{1}{X}\right] = \underset{2}{X}. \tag{19,41}$$

Da nicht alle Strukturkonstanten verschwinden, sondern $C^3_{12} = C^1_{23} = C^2_{31} = 1$ gilt, sind Drehungen nicht vertauschbar. Der Leser mag bestätigen, daß in Kugelkoordinaten die Basis (19,17) auf die gleichen Kommutatoren führt. Die Operatoren $\underset{A}{X}$ und ihre Kommutatoren entsprechen den Drehimpulsoperatoren der Quantenmechanik und ihren Vertauschungsregeln.

*Klassifizierung von Räumen nach ihrer Bewegungsgruppe.* Die Bewegungsgruppe eines Raumes charakterisiert man durch die Zahl ihrer Killing-Vektoren, die Struktur der Gruppe und die Transitivitätsgebiete. Die Bestimmung aller nicht isomorphen Gruppen $G_r$ von $r$ Killing-Vektoren, also von Gruppen, deren Strukturkonstanten sich nicht durch lineare Transformationen der Basis ineinander überführen lassen, ist ein rein mathematisches Problem der Gruppentheorie. Es ist im Prinzip gelöst, in der Literatur findet man Tabellen aller solcher möglichen Gruppen für die in der Relativitätstheorie interessierenden Fälle.

So ist jede Gruppe mit zwei Erzeugenden entweder eine Abelsche Gruppe,

$$\left[\underset{1}{X}, \underset{2}{X}\right] = 0, \tag{19,42}$$

oder es gilt mit $c_1 \neq 0$

$$\left[\underset{1}{X}, \underset{2}{X}\right] = c_1 \underset{1}{X} + c_2 \underset{2}{X}. \tag{19,43}$$

Im zweiten Fall läßt sich aber durch eine Basistransformation

$$\underset{1}{\overline{X}} = c_1 \underset{1}{X} + c_2 \underset{2}{X}, \qquad \underset{2}{\overline{X}} = \underset{2}{X}/c_1 \tag{19,44}$$

immer die Normalform

$$\left[\underset{1}{\overline{X}}, \underset{2}{\overline{X}}\right] = \underset{1}{\overline{X}} \tag{19,45}$$

erreichen: Es gibt genau die beiden nichtisomorphen Gruppen $G_2$ (19,42) und (19,45).

In der Kosmologie sind diejenigen Gruppen von besonderem Interesse, deren Transitivitätsgebiet ein dreidimensionaler Ortsraum ist (homogene Weltmodelle; alle Punkte der dreidimensionalen Welt sind gleichwertig). Zu solchen Weltmodellen führen alle einfach transitiven Gruppen $G_3$. Eine Übersicht über alle nichtisomorphen Gruppen $G_3$ erhält man, indem man durch

$$\tfrac{1}{2} \Delta^{ABE} C^{D}_{AB} = N^{DE}, \qquad A, B = 1, 2, 3 \tag{19,46}$$

die wegen der Antisymmetriebedingung (19,36) möglichen neun Komponenten der Matrix der Strukturkonstanten $C^{D}_{AB}$ auf die $3 \times 3$-Matrix $N^{DE}$ abbildet und diese Matrix weiter in ihren symmetrischen Anteil $n^{DE}$ und den auf einen „Vektor" $a^A$ abbildbaren antisymmetrischen Anteil zerlegt:

$$N^{DE} = n^{DE} + \Delta^{DEA} a_A. \tag{19,47}$$

Setzt man die aus dieser Zerlegung resultierende Darstellung

$$C^{D}_{AB} = \Delta_{EAB} n^{DE} + \delta^{D}_{B} a_A - \delta^{D}_{A} a_B \tag{19,48}$$

der Strukturkonstanten in die Jacobi-Lie-Identitäten (19,38) ein, dann reduzieren sich diese auf

$$n^{AB} a_A = 0. \tag{19,49}$$

Durch reelle lineare Transformationen der Basisoperatoren $\underset{A}{X}$ kann man immer $a_A = (a, 0, 0)$ erreichen und darüber hinaus $n_{AB}$ so auf Hauptachsen transformieren, daß die Diagonalelemente nur die Werte 0, $\pm 1$ haben. Man erhält dadurch die

folgende Normalform der Kommutatoren bzw. Strukturkonstanten einer Gruppe $G_3$:

$$\begin{aligned} \left[\underset{1}{X}, \underset{2}{X}\right] &= n_3 \underset{3}{X} + a \underset{2}{X}, \\ \left[\underset{2}{X}, \underset{3}{X}\right] &= n_1 \underset{1}{X}, \\ \left[\underset{3}{X}, \underset{1}{X}\right] &= n_2 \underset{2}{X} - a \underset{3}{X}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a n_1 &= 0, \\ n_i &= 0, \pm 1, \end{aligned} \tag{19,50}$$

Wie Tab. 19.1 zeigt, gibt es insgesamt 11 Typen von Gruppen $G_3$, die sich auf die 9 sogenannten Bianchi-Typen *I* bis *IX* verteilen. Man beachte, daß es sich bei den Typen *VII* und *VI* für $a \neq 0,1$, jeweils um eine ganze Familie nichtisomorpher Gruppen handelt.

Tabelle 19.1
*Die Strukturkonstanten der Gruppen $G_3$*

| Bianchi-Typ | *I* | *II* | *VII* | *VI* | *IX* | *VIII* | *V* | *IV* | *III* | *VII* | *VI* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $a$ | $a$ |
| $n_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $n_3$ | 0 | 1 | 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | −1 |

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß es auch Gruppen $G_4$ und $G_6$ gibt, die im dreidimensionalen Ortsraum (mehrfach) transitiv sind und deshalb ebenfalls homogenen Weltmodellen entsprechen.

## 19.6. Killing-Vektoren und Erhaltungssätze

Die Erhaltungssätze der Physik stehen in engem Zusammenhang mit den Symmetrieeigenschaften physikalischer Systeme. In der Gravitationstheorie haben auch die Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes eine physikalische Bedeutung. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie Symmetrieeigenschaften (d. h. die Existenz von Killing-Vektorfeldern) zu Erhaltungssätzen oder anderen einfachen Aussagen führen.

*Mechanik eines Massenpunktes.* Die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer Fläche oder im Minkowski-Raum oder die reine Trägheitsbewegung in einem Riemannschen Raum (Bewegung im Gravitationsfeld) erfolgt auf einer Geodäten:

$$\frac{D^2}{D\tau^2} x^a = \frac{D}{D\tau} u^a = u^a{}_{;b} u^b = 0. \tag{19,51}$$

Überschieben dieser Gleichung mit einem Killing-Vektor $\underset{A}{\xi^a}$ führt auf

$$\underset{A}{\xi_a} \frac{D}{D\tau} u^a = \frac{d}{d\tau} \left( \underset{A}{\xi_a} u^a \right) - u^a \underset{A}{\xi_{a;b}} u^b = 0, \tag{19,52}$$

und die Berücksichtigung der Killing-Gleichung (19,5), d. h. der Antisymmetrie von

$\underset{A}{\xi}_{a;b}$, liefert

$$\underset{A}{\xi}_a u^a = \text{const.} \tag{19,53}$$

Die Größen $\underset{A}{\xi}_a u^a$ ändern sich nicht während der Bewegung des Massenpunktes, es sind Erhaltungsgrößen. In der Mechanik ist also jedem Killing-Vektorfeld ein Erhaltungssatz zugeordnet. Im Minkowski-Raum mit seinen 10 Killing-Vektoren (19,12) bis (19,13) gibt es dementsprechend 10 Erhaltungssätze: Die 4 translationsartigen Killing-Vektoren führen auf den Erhaltungssatz des Viererimpulses, die drei räumlichen Drehungen auf den Drehimpulssatz und die drei speziellen Lorentz-Transformationen auf den Schwerpunktsatz.

Interessanterweise existieren Riemannsche Räume, in denen es mehr Erhaltungssätze als Killing-Vektoren gibt, also Erhaltungssätze, die sich nicht auf das Vorhandensein einer Symmetrie zurückführen lassen. Wenn nämlich die Gleichungen

$$\Xi_{ab;n} + \Xi_{bn;a} + \Xi_{na;b} = 0, \qquad \Xi_{na} = \Xi_{an}, \tag{19,54}$$

die wir als Definitionsgleichungen für einen *Killing-Tensor* $\Xi_{an}$ auffassen, eine Lösung haben, die keine Linearkombination von Produkten von Killing-Vektoren ist, sich also *nicht* in der Form

$$\Xi_{ab} = c_0 g_{ab} + \sum_{A,B} c_{AB} \left(\underset{A}{\xi}_a \underset{B}{\xi}_b + \underset{A}{\xi}_b \underset{B}{\xi}_a\right), \qquad c_0, c_{AB} = \text{const} \tag{19,55}$$

schreiben läßt, dann sind die aus (19,51) und (19,54) folgenden Erhaltungssätze

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(\Xi_{ab} u^a u^b\right) = \left(\Xi_{ab} u^a u^b\right)_{;i} u^i = 0 \tag{19,56}$$

unabhängig von den Erhaltungssätzen (19,53). Man kann zeigen, daß es im Minkowski-Raum nur die trivialen Killing-Tensoren (19,55) gibt. Ein Beispiel eines Raumes mit einem nichttrivialen Killing-Tensor ist die in Abschnitt 24.1. dargestellte Kerr-Metrik. Killing-Tensoren entsprechen Symmetrien nicht so sehr der Raum-Zeit, sondern der Differentialgleichungen (Geodätengleichungen) im Raum $\{\tau, x^a, u^a\}$.

Sind Kräfte vorhanden und haben diese ein Potential,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} u_a = -\Phi_{,a}, \tag{19,57}$$

dann gilt ebenfalls der Erhaltungssatz (19,53), wenn das Potential $\Phi$ sich bei der Symmetrieoperation des Raumes nicht ändert:

$$\underset{A}{\xi}^a \Phi_{,a} = \underset{A}{X} \Phi = 0. \tag{19,58}$$

Die Symmetriegruppe eines mechanischen (oder allgemeinen physikalischen) Systems ist also stets eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Raumes, in dem sich das betreffende System befindet.

*Skalare Potentiale in der Elektrodynamik.* Wie die Killing-Gleichungen (19,5) zeigen, besitzt ein Raum genau dann ein Killing-Vektorfeld, wenn die Lie-Ableitung der Metrik in Richtung dieses Vektorfeldes verschwindet:

$$\underset{\xi}{\pounds} g_{mn} = g_{nm,i}\xi^i + g_{im}\xi^i{}_{,n} + g_{ni}\xi^i{}_{,m} = 0. \tag{19,59}$$

Ein physikalisches System, das sich in diesem Raum befindet, nennen wir invariant gegenüber der Bewegung in Richtung des Killing-Vektorfeldes, wenn die Lie-Ableitung der physikalischen Feldgrößen verschwindet. Durch diese Definition wird gewährleistet, daß sich die Komponenten der Feldgrößen bei der Bewegung nicht ändern, wenn man an dem durch die Bewegung erreichten Ort wieder das alte Koordinatensystem einführt (vgl. die Bemerkungen zur anschaulichen Deutung der Lie-Ableitung in Abschnitt 5.5.).

Existiert also in einem Riemannschen Raum ein elektromagnetisches Feld (Testfeld oder Feld, das selber gravitierend wirkt), dann besitzt dieses genau dann eine Symmetrie, wenn bei passender Eichung das Viererpotential die Bedingung

$$\underset{\xi}{£} A_m = A_{m,i}\xi^i + A_i\xi^i{}_{,m} = 0 \tag{19,60}$$

erfüllt.

Überschiebt man den Feldstärketensor mit dem Killing-Vektor, dann folgt für den so entstehenden Vektor $E_m$ die Darstellung

$$E_m = F_{mn}\xi^n = (A_{n,m} - A_{m,n})\,\xi^n = \xi^n A_{n,m} + A_n\xi^n{}_{,m}, \tag{19,61}$$

d. h., $E_m$ ist als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi$ darstellbar:

$$E_m = (\xi^n A_n)_{,m} = -\Phi_{,m}. \tag{19,62}$$

Bei Abwesenheit von Ladungen und Strömen oder in einem einfach zusammenhängenden Gebiet außerhalb der Quellen oder bei Parallelität von Stromdichtevektor $j^a$ und Killing-Vektor $\xi^a$ kann man eine analoge Aussage auch für den Vektor

$$H_m = \tilde{F}_{mn}\xi^n \tag{19,63}$$

ableiten. Aus den Maxwell-Gleichungen

$$F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{mn}{}_{ab}\tilde{F}^{ab}{}_{;n} = \frac{1}{c}\,j^m \tag{19,64}$$

folgt nämlich durch Überschieben mit $\varepsilon_{mrst}\xi^t$ die Gleichung

$$(\tilde{F}_{rs,t} + \tilde{F}_{st,r} + \tilde{F}_{tr,s})\,\xi^t = 0, \tag{19,65}$$

und da die Lie-Ableitung des dualen Feldstärketensors wegen (19,60) natürlich verschwindet:

$$\underset{\xi}{£}\tilde{F}_{mn} = \tilde{F}_{mn,a}\xi^a + \tilde{F}_{an}\xi^a{}_{,m} + \tilde{F}_{ma}\xi^a{}_{,n} = 0, \tag{19,66}$$

erfüllt $H_m$ die Bedingung $H_{m,a} = H_{a,m}$ und läßt sich infolgedessen als Gradient eines Potentials $\Psi$ schreiben:

$$H_m = -\Psi_{,m}. \tag{19,67}$$

Die sechs Größen $E^m$ und $H^m$, die (für $\xi_a\xi^a \neq 0$) das Maxwell-Feld vollständig beschreiben, sind also als Gradienten zweier skalarer Potentiale darstellbar, wenn $\xi^a$ ein Killing-Vektor ist. Diese Potentiale sind die Verallgemeinerung des elektrostatischen bzw. skalaren magnetischen Potentials, die man im Minkowski-Raum einführen kann, wenn die Felder statisch sind, d. h. sich bei einer Bewegung in Richtung eines hyperflächennormalen zeitartigen Killing-Vektors nicht ändern.

*Gleichgewichtsbedingung der Thermostatik.* Wie wir in Abschnitt 8.5. gezeigt haben, ist ein System nur dann im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn die Lie-Ableitung der Metrik in Richtung von $u^a/T$ verschwindet, dieser Vektor also ein Killing-Vektor ist. Von Statik spricht man, wenn er darüber hinaus noch hyperflächennormal ist. Im Ruhesystem $u^a = \left(0, 0, 0, c/\sqrt{-g_{44}}\right)$ der Materie verschwinden dann die Komponenten $g_{4\alpha}$, die Metrik ändert sich bei Zeitumkehr nicht.

Gehen wir mit dem Vektor $\xi^a = u^a/T$ in die Killing-Gleichungen (19,59) ein, dann folgt (mit $g_{4\alpha} = 0$)

$$g_{\alpha\beta,4} = 0, \qquad T_{,4} = 0, \qquad \left(\sqrt{-g_{44}}T\right)_{,\alpha} = 0. \tag{19,68}$$

Diese Gleichungen kann man durch eine reine Zeittransformation $dt' = \sqrt{-g_{44}}T\,dt$, $g_{4'4'} = -1/T^2$ in

$$g_{mn,4} = 0 \tag{19,69}$$

und

$$\left(\sqrt{-g_{44}}T\right)_{,i} = 0 \tag{19,70}$$

überführen (die Striche an den Indizes haben wir wieder weggelassen).

Die Gln. (19,69) und (19,70) sind die Gleichgewichtsbedingungen im Ruhesystem der Materie. Ein System ist also nicht dann im Gleichgewicht, wenn der Temperaturgradient verschwindet, sondern wenn der Gradient von $\sqrt{-g_{44}}T$ Null ist. Diese Bedingung läßt sich so interpretieren, daß im Gleichgewicht die Temperaturänderung gerade die Energie kompensiert, die beim (virtuellen) Transport eines Volumenelementes im Schwerefeld zu- oder abgeführt werden müßte.

*Die Observablen der Quantenmechanik.* In der üblichen Ortsdarstellung der Quantenmechanik entsprechen die den physikalischen Observablen zugeordneten Operatoren des Impulses bzw. des Drehimpulses genau den Operatoren $\underset{A}{X}$ der Translationen (19,39) bzw. der Drehungen (19,40) des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen denjenigen Größen, die für ein umfassenderes physikalisches System (z. B. ein Atom) auf Grund der Symmetrie des Raumes erhalten bleiben, und denen, die zur Beschreibung eines Teilsystems (z. B. eines Elektrons) sinnvollerweise benutzt werden können. Hieraus erklären sich auch die Schwierigkeiten einer Übertragung der Quantenmechanik vom Minkowski-Raum auf einen allgemeinen Riemannschen Raum, der ja gar keine Killing-Vektoren besitzen muß.

*Erhaltungssätze für allgemeine Felder.* In einem Riemannschen Raum gilt für den Energieimpulstensor eines beliebigen Feldes (einer beliebigen Materieverteilung) der lokale Erhaltungssatz

$$T^{ik}{}_{;k} = 0, \tag{19,71}$$

dem aber wegen der Nichtexistenz eines Gaußschen Satzes für Tensorfelder zweiter oder höherer Stufe kein echter, integraler Erhaltungssatz zugeordnet werden kann.

Existiert in dem Raum jedoch ein Killing-Vektorfeld $\underset{A}{\xi^a}$, dann folgt aus (19,59) und der Killing-Gleichung (19,5)

$$\left(\underset{A}{\xi_i} T^{ik}\right)_{;k} = \underset{A}{\xi_{i;k}} T^{ik} + \underset{A}{\xi_i} T^{ik}{}_{;k} = 0, \tag{19,72}$$

und auf diesen lokalen Erhaltungssatz für ein Vektorfeld kann der Gaußsche Satz angewandt werden (vgl. Abschnitt 7.5.). Unter gewissen mathematischen Voraussetzungen kann dann jedem Killing-Vektorfeld des Raumes ein Erhaltungssatz

$$\underset{A}{T} = \int_{x^4=\text{const}} T^{ia} \underset{A}{\xi_i}\, \mathrm{d}f_a = \int_{x^4=\text{const}} T^{i4} \underset{A}{\xi_i} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}x^3 = \text{const} \tag{19,73}$$

zugeordnet werden. Ist der Killing-Vektor zeitartig, wird man die zugeordnete Erhaltungsgröße Energie nennen. Ob man bei raumartigen Killing-Vektoren die Bezeichnung Impuls oder Drehimpuls verwendet, ist eine manchmal willkürliche Festlegung. Man kann sich dabei von den Transivitätseigenschaften der Bewegungsgruppe (die drei Translationen im flachen Raum ergeben eine transitive Gruppe, die drei Drehungen sind im Ortsraum intransitiv), von den Kommutatoren der zugeordneten Operatoren $\underset{A}{X}$ oder von der Struktur der Killing-Vektoren im asymptotischen flachen Fernfeldbereich leiten lassen.

Man kann dem Erhaltungssatz (19,72) eine andere Gestalt geben, indem man von der für alle Vektorfelder $\xi^a$ geltenden Identitäten

$$(\xi^{a;b} - \xi^{b;a})_{;a;b} = 0 \tag{19,74}$$

ausgeht (Komar 1959). Für Killingvektorfelder folgt aus ihr und den Gleichungen (19,5) und (19,21) die Beziehung

$$(R^{mb}\xi_m)_{;b} = 0 = \left[\left(T^{mb} - \frac{1}{2} g^{mb} T\right) \xi_m\right]_{;b}, \tag{19,75}$$

die wegen $T_{,m}\xi^m = 0$ mit (19,72) übereinstimmt.

Vom Standpunkt der Symmetrieeigenschaften eines Feldes und des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen ausgehend, würde man die in Abschnitt 14.5. ausführlich diskutierte Frage nach der Gültigkeit eines Energiesatzes für ein bzw. in einem Gravitationsfeld also folgendermaßen beantworten: Die Energie eines gravitierenden Systems läßt sich nur dann definieren, wenn ein zeitartiger Killing-Vektor existiert. Wenn sie sich definieren läßt, gibt es auch immer einen Energieerhaltungssatz.

*Literatur zu Kapitel 19.:*

[6], [20], [56], [64], [158], [161].

## 20.* Die Einbettung Riemannscher Räume in flache Räume höherer Dimension

In der Geschichte der Mathematik bedurfte es eines langen Reifungsprozesses, um von der Vorstellung von Flächen als Gebilden im dreidimensionalen euklidischen Raum zu der Vorstellung der inneren Geometrie einer Fläche und später auch eines Raumes zu gelangen. In der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es die Aufgabe der Physik, die *innere* Geometrie des Raumes zu untersuchen. Man kann jedoch unsere vierdimensionale gekrümmte Raum-Zeit (Koordinaten $x^n$) auch als Hyperfläche in einem flachen Raum (Koordinaten $y^A$) geeigneter Dimension darstellen, sie in einen

solchen höherdimensionalen Raum einbetten. Dieser Raum dient nur als Mittel zum Studium der Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes, er hat für sich allein keine physikalische Bedeutung.

Von einer lokalen isometrischen Einbettung eines Riemannschen Raumes $V_4$ der Metrik

$$ds^2 = g_{nm}\, dx^n\, dx^m \tag{20,1}$$

in einen flachen Raum

$$ds^2 = \sum_{A=1}^{N} e_A (dy^A)^2, \qquad e_A = \pm 1 \tag{20,2}$$

der Dimension $N$ spricht man dann, wenn in dem flachen Raum durch die $N - 4$ unabhängigen Gleichungen

$$F_B(y^A) = 0 \tag{20,3}$$

oder (in anderer Darstellung) durch

$$y^A = f^A(x^n) \tag{20,4}$$

eine Hyperfläche so definiert werden kann, daß die Flachraummetrik (20,2) auf ihr die Metrik des Riemannschen Raumes induziert. Notwendige und hinreichende Bedingung ist also die Existenz von $N$ Funktionen $f^A$, die bei vorgegebener Metrik $g_{nm}$ die Gleichungen

$$g_{nm} = \sum_A e_A \frac{\partial f^A}{\partial x^n} \frac{\partial f^A}{\partial x^m} \tag{20,5}$$

erfüllen. Die zur Einbettung eines Raumes *mindestens* benötigte zusätzliche Dimensionszahl $N - 4$ heißt die (Einbettungs-) *Klasse* eines Raumes. Man kann zeigen, daß ein $n$-dimensionaler Riemannscher Raum höchstens die Klasse $\binom{n}{2}$ hat. Unsere Welt kann also lokal, d. h. bei Außerachtlassung der topologischen Verhältnisse, immer in einem höchstens zehndimensionalen flachen Raum eingebettet werden.

Die Einbettung gestattet eine von der Petrow-Klassifizierung und der Klassifizierung nach Bewegungsgruppen unabhängige invariante Charakterisierung der Lösungen der Einsteinschen Gleichungen. Sie liefert konstruktive Methoden zur Gewinnung von Lösungen einer bestimmten Klasse, wie dies die anderen Klassifizierungen auch tun. Wegen des Fehlens einer unmittelbaren physikalischen Interpretation der Einbettungsklasse sind diese Methoden jedoch noch nicht so weit untersucht und ausgebaut worden wie bei den anderen oben dargestellten Verfahren.

Folgende Ergebnisse der Einbettungsklassifizierung möchten wir erwähnen:

1. Es gibt keine Vakuumlösung der Einbettungsklasse 1.

2. Die meisten Lösungen der Einbettungsklasse 1 mit idealer Flüssigkeit sind bekannt; zu ihnen gehören die innere Schwarzschild-Lösung, der Friedman-Kosmos und Verallgemeinerungen dieser beiden Lösungen.

3. Es gibt einige Theoreme über Zusammenhänge zwischen Einbettungsklasse einerseits und Petrow-Klasse oder Struktur der Bewegungsgruppe andererseits.

*Literatur zu Kapitel 20.:*

[56].

# 21. Übersicht über einige ausgewählte Lösungsklassen

Trotz der Kompliziertheit des Differentialgleichungssystems der Einsteinschen Gleichungen sind sehr viele Lösungen gefunden worden; die meisten haben aber nur eine geringe physikalische Bedeutung, d. h., es gibt in unserer Welt wahrscheinlich keine Quellen, deren Gravitationsfelder sie sein könnten. Andererseits sind die strengen Lösungen vieler physikalisch wichtiger Probleme unbekannt, z. B. die des Zweikörperproblems. Wir müssen uns hier auf einige kurze Hinweise und Bemerkungen zu recht willkürlich ausgewählten Lösungsklassen beschränken. Einige als Stern- oder Weltmodelle brauchbare Lösungen werden wir in den Kapiteln 24., 26. und 28. ausführlicher darstellen.

## 21.1. Vakuumlösungen

Systematisch untersucht wurden bisher einige Klassen entarteter Vakuumlösungen, also Lösungen mit (mindestens) einer scherungsfreien geodätischen Nullkongruenz. Zu ihnen gehören:

1. *Typ-D-Lösungen.* Sie sind alle bekannt; ihr wichtigster Vertreter ist die Kerr-Lösung (Kerr, 1963), die in Boyer-Lindquist-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ die Form

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\vartheta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 \\ &\quad + \frac{2Mr}{\Sigma}\,(a\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi - c\,\mathrm{d}t)^2, \qquad (21{,}1) \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2\cos^2\vartheta, \qquad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \end{aligned}$$

hat und als Spezialfall $(a = 0)$ die Schwarzschild-Metrik enthält. Die definitionsgemäß bei jeder Typ-$D$-Lösung existierenden zwei entarteten Nulleigenvektoren des Krümmungstensors sind proportional zu

$$\begin{aligned} k^i &= \big(1, 0, a/\Delta, (r^2 + a^2)/\Delta\big), \\ l^i &= \big(-1, 0, a/\Delta, -(r^2 + a^2)/\Delta\big). \end{aligned} \qquad (21{,}2)$$

Ein Beispiel für eine physikalisch (noch) nicht deutbare oder anwendbare Typ-$D$-Lösung ist die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}z^2}{b/z - 1} + \left(\frac{b}{z} - 1\right)\mathrm{d}\varphi^2 + z^2(\mathrm{d}r^2 - \sinh^2 r\, c^2\,\mathrm{d}t^2), \qquad (21{,}3)$$

die aus der Schwarzschild-Metrik (10,19) durch die Transformation

$$\vartheta \to \mathrm{i}r, \qquad \varphi \to i\,ct, \qquad r \to z, \qquad ct \to \mathrm{i}\,\varphi \qquad (21{,}4)$$

hervorgeht. Man beachte, daß die Koordinatenbezeichnungen in (21,3) vollkommen willkürlich sind, $\varphi$ z. B. keine Winkelkoordinate zu sein braucht.

2. *Entartete Lösungen, deren Nulleigenvektorfeld rotations- und divergenzfrei ist.* In Abschnitt 17.3. wurde dargelegt, daß die wichtigsten physikalischen und mathema-

tischen Eigenschaften eines Nullvektorfeldes in den drei optischen Skalaren $\sigma$ (Scherung), $\omega$ (Rotation) und $\Theta$ (Divergenz) enthalten sind. Für entartete Lösungen verschwindet definitionsgemäß $\sigma$, und das Verschwinden auch der anderen Skalare vereinfacht die Feldgleichungen beträchtlich. Außer den speziellen Typ-$D$-Lösungen, die diese Eigenschaften haben, ist auch die Struktur aller in diese Klasse fallenden Lösungen vom Typ *III* oder *N* bekannt. Ihre Metrik hat die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y + B\,\mathrm{d}u|^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + H\,\mathrm{d}u^2, \tag{21,5}$$

wobei die Funktionen $B$ und $H$ noch einige Differentialgleichungen erfüllen müssen. Wichtigste Vertreter dieser Klasse sind die in Abschnitt 15.3. gefundenen ebenfrontigen Wellen mit parallelen Strahlen (15,39) und (15,40).

3. *Entartete Lösungen, deren Nulleigenvektorfeld rotationsfrei ist, aber eine nichtverschwindende Divergenz hat.* Die Metriken dieser Lösungsklasse werden erfaßt durch

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{v^2}{p^2}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + c\,\mathrm{d}u^2, \tag{21,6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0, \qquad c = -\frac{2m}{v} - p^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln p - 2v\,\frac{\partial \ln p}{\partial u}, \qquad m = 0, 1,$$

wobei die Funktion $p$ eine Lösung der Gleichung

$$p^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[p^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln p\right] = -12m\,\frac{\partial \ln p}{\partial u} \tag{21,7}$$

ist (ROBINSON/TRAUTMAN 1962). Als Spezialfall ist auch hier die Schwarzschild-Metrik enthalten.

Die Hoffnung, unter den Lösungen (21,5) und (21,6) Metriken zu finden, die das Strahlungsfeld einer physikalisch sinnvollen Materieverteilung beschreiben, hat sich nicht erfüllt.

## 21.2. Lösungen mit besonderen Symmetrieeigenschaften

Über Lösungen mit Symmetrieeigenschaften (Killing-Vektoren) ist eine so umfangreiche Literatur vorhanden, daß wir uns hier auf kurze Hinweise auf solche Lösungsklassen beschränken müssen, die häufig benutzt werden oder die besonders weitgehend erforscht sind.

1. *Die Weylsche Klasse — axialsymmetrische statische Vakuumfelder.* Im flachen Raum sind physikalische Anordnungen, die statisch und außerdem kugelsymmetrisch oder axialsymmetrisch (in Zylinderkoordinaten: $\varphi$-unabhängig) sind, besonders einfach. Das Analogon der Kugelsymmetrie führt bei Vakuumlösungen sofort auf die Schwarzschild-Lösung (Birkhoff-Theorem). Die relativistische Verallgemeinerung der axialsymmetrischen statischen Anordnungen ist die Weylsche Klasse: In einem geeigneten Koordinatensystem soll die Lösung von der Zeit $t$ und einer zyklischen Koordinate $\varphi$ nicht abhängen und sich auch bei den Transformationen $t \to -t$, $\varphi \to -\varphi$ nicht ändern (keine Terme $g_{\varphi r}$, $g_{\varphi\vartheta}$, $g_{tr}$ und $g_{t\vartheta}$ enthalten). Die letzte Bedingung bedeutet physikalisch das Verbot einer zeitunabhängigen Rotation der Quelle, deren äußeres Feld wir betrachten.

In invarianter Formulierung: Zur Weylschen Klasse gehören alle Vakuumlösungen mit zwei vertauschbaren hyperflächennormalen Killing-Vektoren, von denen einer zeitartig ist, während die dem raumartigen zweiten zugeordnete Weltlinienkongruenz aus geschlossenen Kurven endlicher Länge besteht (eine Metrik heißt stationär, wenn sie einen zeitartigen Killing-Vektor besitzt, und statisch, wenn dieser Vektor hyperflächennormal ist). Man kann zeigen, daß sich für diese Symmetrie die Metrik auf die Normalform

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2U}[\mathrm{e}^{2\nu}(\mathrm{d}\varrho^2 + \mathrm{d}z^2) + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2] - \mathrm{e}^{2U}c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{21,8}$$

transformieren läßt, wobei die Funktionen $U(\varrho, z)$ und $\nu(\varrho, z)$ aus

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{21,9}$$

und

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \nu}{\partial \varrho} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \nu}{\partial z} = 2\,\frac{\partial U}{\partial \varrho}\frac{\partial U}{\partial z} \tag{21,10}$$

zu bestimmen sind (Weyl 1917).

Da (21,10) bei Gültigkeit von (21,9) immer integrabel ist, können wir die erstaunliche Tatsache konstatieren, daß man anscheinend aus jeder ($\varphi$-unabhängigen) Lösung $U$ der Potentialgleichung (21,9) im flachen Raum, d. h. zu jeder axialsymmetrischen Vakuumlösung der Newtonschen Gravitationstheorie, in einfacher Weise eine vernünftige Lösung der Einsteinschen Theorie gewinnen kann. In dieser zu stark vereinfachten Form ist diese Aussage aber falsch. Das liegt daran, daß wir noch nicht gesichert haben, daß die singuläre Linie $\varrho = 0$ des Koordinatensystems nicht auch eine im physikalischen Sinn singuläre Linie mit unendlicher Massendichte ist. Man kann das Auftreten einer solchen Singularität durch die Forderung ausschließen, daß für jeden infinitesimalen Kreis um die $z$-Achse das Verhältnis von Umfang zu Radius $2\pi$ ist (lokal ein Minkowski-Raum vorhanden ist); dies entspricht der Forderung

$$\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad \varrho = 0, \qquad z \text{ beliebig.} \tag{21,11}$$

Die Differentialgleichung (21,9) für $U$ ist zwar linear, jedoch wird die Summe zweier Lösungen $U$, die jede für sich ein reguläres Verhalten haben, im allgemeinen die Nebenbedingung (21,11) nicht erfüllen: Die einfache Überlagerung von Feldern zweier Quellen ergibt kein Feld, dessen Quellen im Gravitationsgleichgewicht sind.

2. *Axialsymmetrische stationäre Vakuumlösungen.* In der Newtonschen Gravitationstheorie hängt das Gravitationsfeld einer axialsymmetrischen Quellverteilung nicht von einer etwaigen Rotation der Quelle um die Symmetrieachse ab. In der Einsteinschen Theorie hingegen wird durch den entsprechenden Materiestrom, der in den Energieimpulstensor eingeht, die Metrik verändert. Bei gleichmäßiger Rotation um die Symmetrieachse wird die Metrik zwar von $\varphi$ und $t$ unabhängig sein, aber $g_{\varphi t}$ wird nicht verschwinden. In invarianter Formulierung: Axialsymmetrische stationäre Vakuumfelder besitzen zwei vertauschbare Killing-Vektoren (eine Abelsche Bewegungsgruppe $G_2$), von denen einer zeitartig ist.

Man kann zeigen, daß sich die Metrik dieser Klasse auf die Normalform

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2U}[\mathrm{e}^{2\nu}(\mathrm{d}\varrho^2 + \mathrm{d}z^2) + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2] - \mathrm{e}^{2U}(c\,\mathrm{d}t + \mathrm{a}\,\mathrm{d}\varphi)^2 \tag{21,12}$$

transformieren läßt, wobei die nur von $\varrho$ und $z$ abhängigen Funktionen $U$, $v$ und $a$ den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} = -\frac{1}{2}\frac{e^{4U}}{\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2\right], \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{4U}}{\varrho}\frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{e^{4U}}{\varrho}\frac{\partial a}{\partial \varrho}\right) = 0 \end{aligned} \tag{21,13}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{e^{4U}}{4\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial \varrho}\right)^2 - \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2\right], \\ &\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial z} = 2\frac{\partial U}{\partial \varrho}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{e^{4U}}{2\varrho^2}\frac{\partial a}{\partial \varrho}\frac{\partial a}{\partial z} \end{aligned} \tag{21,14}$$

genügen müssen. Das System (21,14) ist bei Gültigkeit von (21,13) immer integrabel, so daß $v$ durch Quadraturen berechenbar ist.

Das eigentliche Feldgleichungssystem (21,13) ist eingehend untersucht worden, sowohl hinsichtlich einfacher Lösungen als auch der Möglichkeit, aus bereits bekannten Lösungen neue erzeugen zu können, z. B. durch Bäcklund-Transformationen. Der bekannteste und wichtigste Vertreter der Klasse der axialsymmetrischen stationären Vakuumlösungen ist die Kerr-Metrik (21,1).

3. *Lösungen, deren Metrik Unterräume konstanter Krümmung enthält.* Wichtige Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen enthalten oft einen Unterraum hoher Symmetrie, z. B. einen Raum konstanter Krümmung, also einen Raum mit größtmöglicher Zahl von Killing-Vektoren (vgl. Abschnitt 19.4.). Wegen der Bedeutung der Räume konstanter Krümmung wollen wir ihre Eigenschaften hier ausführlicher darstellen.

*Zweidimensionale* Räume konstanter Krümmung

$$\begin{aligned} &R_{EABF} = \varepsilon K^{-2}(g_{AF}g_{EB} - g_{AB}g_{EF}), \qquad A, B, \ldots = 1, 2, \\ &\varepsilon = \pm 1, 0, \qquad K = \text{const} \end{aligned} \tag{21,15}$$

können wir uns (wenigstens teilweise) als Flächen in einem dreidimensionalen flachen Raum vorstellen. Flächen positiver Krümmung ($\varepsilon = +1$) haben die Metrik

$$ds^2 = K^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \tag{21,16}$$

es sind Kugeln vom Radius $K$ [vgl. (1,35) bis (1,38)]. Flächen negativer Krümmung ($\varepsilon = -1$) sind Pseudosphären mit der Metrik

$$ds^2 = K^2(d\vartheta^2 + \sinh^2\vartheta\, d\varphi^2), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad \vartheta \geqq 0. \tag{21,17}$$

Sie können durch Rotationsflächen realisiert werden, die durch Rotation der Traktrix

$$z = K \ln\left|\frac{K \pm \sqrt{K^2 - \varrho^2}}{\varrho}\right| \mp \sqrt{K^2 - \varrho^2} \tag{21,18}$$

um die $z$-Achse entstehen ($\varrho^2 = x^2 + y^2$). Der Name Traktrix (Ziehkurve, Schleppkurve) rührt davon her, daß genau diese Kurve entsteht, wenn ein Mensch auf der

$z$-Achse läuft und an einem Seil der Länge $K$ einen Gegenstand hinter sich her zieht, der anfangs nicht auf der $z$-Achse lag (vgl. Abb. 21.1).

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Fläche (21,18) wirklich die Metrik (21,17) hat, indem man in das Linienelement des flachen Raumes mit der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varrho}\right)^2 = \frac{\varrho^2}{K^2 - \varrho^2} \tag{21,19}$$

der Traktrix eingeht und anschließend die Substitution $\varrho = K \sin \vartheta$ durchführt.

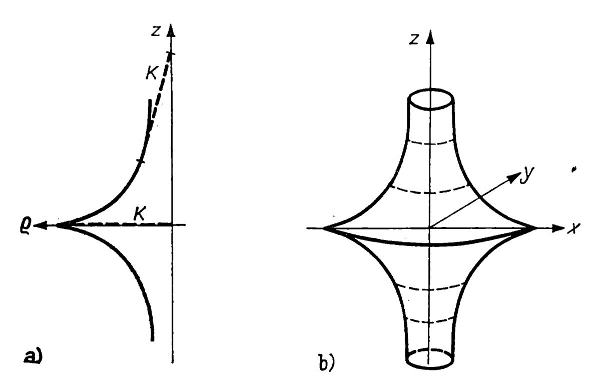



Abb. 21.1
Traktrix (a) und Modell einer Fläche konstanter negativer Krümmung (b)

Während das Linienelement (21,17) des Raumes konstanter negativer Krümmung für alle Werte von $\varphi$ und $\vartheta$ regulär ist, hat die Fläche eine singuläre Linie (für $z = 0$). Man kann ganz allgemein beweisen, daß es keine Realisierung des Raumes konstanter negativer Krümmung durch eine Fläche in einem flachen dreidimensionalen Raum gibt, die überall regulär ist: *Global* ist dieser zweidimensionale Riemannsche Raum nicht in einen flachen dreidimensionalen Raum einbettbar, eine solche Einbettung ist nur *lokal* möglich.

Eine Fläche der Krümmung Null schließlich ist lokal eine Ebene:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2, \qquad -\infty \leqq \varphi \leqq +\infty, \qquad -\infty \leqq \vartheta \leqq +\infty, \tag{21,20}$$

kann aber auch (nach entsprechender Verbiegung der Ebene) z. B. durch einen Kegelmantel oder einen Zylindermantel realisiert werden. Identifiziert man bei einem Zylindermantel die Punkte der Grundlinie mit denen der Höhe $H$, läßt man also für die Variablen $\varphi$ und $\vartheta$ nur die Intervalle $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi R$, $0 \leqq \vartheta \leqq H$ bei Identifizierung der jeweiligen Endpunkte zu, hat man einen geschlossenen Raum der Krümmung Null konstruiert.

Die drei Typen (21,16), (21,17) und (21,20) eines zweidimensionalen Raumes konstanter Krümmung lassen sich in der einen Form

$$\mathrm{d}s^2 = K^2 \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{(1 + \varepsilon r^2/4)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \tag{21,21}$$

der Metrik erfassen, die deutlicher als die Winkelkoordinaten die Isotropie dieser Räume zeigt, dafür aber den Punkt $r = 0$ auszeichnet. Eine andere häufig benutzte Form der Metrik ist

$$\mathrm{d}s^2 = K^2 \left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1 - \varepsilon\bar{r}^2} + \bar{r}^2 \,\mathrm{d}\varphi^2\right], \quad \bar{r} = \frac{r}{1 + \varepsilon r^2/4}. \tag{21,22}$$

Lassen wir die bisher stillschweigend gemachte Voraussetzung fallen, daß der zweidimensionale Raum die Signatur $+2$ hat (keine zeitartige Richtung enthält), dann kann man (21,21) verallgemeinern: Die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = K^2 \frac{e_1(\mathrm{d}x^1)^2 + e_2(\mathrm{d}x^2)^2}{[1 + \varepsilon(e_1 x^{1^2} + e_2 x^{2^2})/4]^2}, \quad e_1 = \pm 1, \quad e_2 = \pm 1, \quad \varepsilon = 0, \pm 1 \tag{21,23}$$

ist die Normalform der Metrik eines zweidimensionalen Raumes konstanter Krümmung.

Unterräume dieser Art treten bei kugelsymmetrischen Lösungen auf. Ein anderes interessantes Beispiel ist die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = K^2[(\mathrm{d}x^1)^2 + \sin^2 x^1(\mathrm{d}x^2)^2 + \sin^2 ct(\mathrm{d}x^3)^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2], \tag{21,24}$$

die das Produkt zweier Räume konstanter Krümmung ist und das Gravitationsfeld eines kovariant konstanten elektrischen Feldes mit der einzigen nichtverschwindenden Komponente

$$F_{34} = \frac{1}{K^3} \sin ct \tag{21,25}$$

beschreibt.

*Dreidimensionale* Räume konstanter Krümmung

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} = \frac{\varepsilon}{K^2}(g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}), \qquad \alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3$$
$$R = 6\varepsilon/K^2, \qquad \varepsilon = 0, \pm 1, \quad K = \mathrm{const} \tag{21,26}$$

zerfallen ebenfalls in drei Typen, wenn wir uns auf reine Ortsräume beschränken.

Ein Raum positiver konstanter Krümmung ($\varepsilon = +1$) entspricht einer Hyperkugel

$$\mathrm{d}s^2 = K^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)],$$
$$0 \leqq \chi \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \tag{21,27}$$

die sich gemäß

$$y_1 = K\cos\chi, \qquad y_3 = K\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$y_2 = K\sin\chi\cos\vartheta, \qquad y_4 = K\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi \tag{21,28}$$

in einen vierdimensionalen flachen Raum einbetten läßt. Diese Kugel hat das Volumen (vom vierdimensionalen Raum her gesehen: die Oberfläche)

$$V = \int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \int K^3 \sin^2\chi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi^2 K^3. \tag{21,29}$$

Die „radiale“ Koordinate $\chi$ kann maximal den Wert $\chi = \pi$ annehmen; es gibt einen vom Nullpunkt $\chi = 0$ maximal entfernten Punkt, den Antipodenpunkt $\chi = \pi$.

Ein Raum negativer konstanter Krümmung ($\varepsilon = -1$) hat die Metrik

$$ds^2 = K^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)]. \tag{21,30}$$

Die „radiale" Koordinate $\chi$ kann beliebig variieren, der Raum kann eine unendliche Ausdehnung haben.

Ein Raum der Krümmung Null ($\varepsilon = 0$) schließlich ist (lokal) ein gewöhnlicher flacher Ortsraum:

$$ds^2 = d\chi^2 + d\vartheta^2 + d\varphi^2. \tag{21,31}$$

Die Metrik aller drei Raumtypen kann man in der Form

$$ds^2 = K^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \varepsilon r^2/4)^2} = K^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \varepsilon \bar{r}^2} + \bar{r}^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] \tag{21,32}$$

schreiben. Räume mit $\varepsilon = 1$ werden *geschlossen* genannt, da sie zwar unbegrenzt sind, aber nur ein endliches Volumen enthalten und der Abstand zweier Punkte beschränkt ist. Räume mit $\varepsilon = 0, -1$ bezeichnet man häufig als *offen*. Da es jedoch unter den Räumen negativer Krümmung und den flachen Räumen durchaus auch geschlossene Modelle gibt, die bei geeigneter Identifizierung von Punkten entstehen [vgl. das in Anschluß an Gl. (21,20) dargestellte Beispiel], ist diese Sprechweise etwas irreführend. Die Aufgabe, alle möglichen Realisierungen eines Raumes konstanter Krümmung zu finden, bezeichnet man als das Caley-Kleinsche Raumformenproblem.

Lösungen, die einen dreidimensionalen Ortsraum konstanter Krümmung enthalten, werden in der Kosmologie viel benutzt (Robertson-Walker-Metriken). Ihre physikalischen Eigenschaften werden wir später eingehend darstellen.

*Vierdimensionale* Räume konstanter Krümmung sind als Weltmodelle unter dem Namen De-Sitter-Kosmen bekannt; manchmal bezeichnet man so auch nur die Räume konstanter positiver Krümmung. Die De-Sitter-Kosmen lassen sich alle als ein Hyperboloid

$$x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon w^2 - v^2 = K^2 \tag{21,33}$$

in einem flachen Raum der Metrik

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \varepsilon\, dw^2 - dv^2 \tag{21,34}$$

darstellen. Für positive Krümmung haben sie die Metrik

$$ds^2 = K^2[\cosh^2 ct\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\} - c^2\, dt^2], \tag{21,35}$$

der Raum der Krümmung Null ist der Minkowski-Raum, und Räume negativer Krümmung werden durch

$$ds^2 = K^2[\cos^2 ct\{d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\} - c^2\, dt^2] \tag{21,36}$$

lokal dargestellt. Unter den Räumen negativer Krümmung gibt es solche mit geschlossenen zeitartigen Kurven.

De-Sitter-Kosmen, besitzen einen dreidimensionalen Ortsraum konstanter Krümmung und gehören deshalb zu den Robertson-Walker-Metriken.

*Literatur zu Kapitel 21.:*

[56,] [64], [125], [153], [159], [183], [205].

# Gravitationskollaps und Schwarze Löcher

In den bisher betrachteten Beispielen und Anwendungen haben wir die Nichtlinearität der Einsteinschen Gleichungen zwar immer richtig beachtet, aber die meisten diskutierten Eigenschaften und Effekte unterschieden sich qualitativ nicht von denen anderer klassischer (linearer) Felder. Wir werden jetzt, bei der Darstellung der Schwarzen Löcher („black holes") und der Weltmodelle, Eigenschaften des Gravitationsfeldes kennenlernen, die deutlich von denen eines linearen Feldes abweichen; die Struktur der Raum-Zeit ist wesentlich gegenüber der eines Minkowski-Raumes geändert, wesentlich neue Fragestellungen spielen eine Rolle.

## 22. Die Schwarzschild-Singularität

### 22.1. Wie untersucht man singuläre Stellen einer Metrik?

Schon ein flüchtiger Blick auf die Schwarzschild-Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2M/r} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - (1 - 2M/r)\,c^2\,\mathrm{d}t^2 \qquad (22{,}1)$$

zeigt, daß bei $r = 2M$ eine Singularität des metrischen Tensors (der Komponente $g_{rr}$) vorhanden ist. Bei unserer ersten Diskussion der Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik in Kapitel 10. hatten wir dieses Problem mit der Bemerkung beiseite geschoben, daß die Stelle $r = 2M$ sowieso weit im Innern der Himmelskörper liegt, wo die Vakuumlösung ja gar nicht mehr zuständig ist. Jetzt wollen wir uns aber der Frage zuwenden, ob und in welchem Sinne bei $r = 2M$ eine Singularität der Metrik vorliegt und welchen physikalischen Hintergrund dies hat.

Singuläre Stellen eines Feldes sind ein wohlbekanntes Phänomen der klassischen Physik. In der Elektrostatik ist das kugelsymmetrische Coulomb-Feld

$$U = \frac{e}{4\pi r} \qquad (22{,}2)$$

singulär bei $r = 0$, weil dort eine unendlich große Ladungsdichte (Punktladung) vorhanden ist. In nichtlinearen Theorien ist die Lage komplizierter, weil die Singularität nicht am Ort der Quelle aufzutreten braucht. Einstein selbst hatte die Hoffnung, daß die Singularitäten des Gravitationsfeldes Elementarteilchen darstellen würden,

die Allgemeine Relativitätstheorie also gewissermaßen automatisch eine (nichtquantenfeldtheoretische) Elementarteilchentheorie liefern würde. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt. Man hat aber inzwischen einiges über die Art der Singularitäten des Gravitationsfeldes und die dort auftretenden physikalischen Effekte gelernt. Wir werden uns hier allerdings auf die Darstellung einiger Grundideen beschränken müssen und verweisen wegen der Einzelheiten auf die umfangreiche Spezialliteratur.

Offensichtlich kann eine Singularität des Raumes durch ein singuläres Koordinatensystem vorgetäuscht werden. Im flachen dreidimensionalen Raum sind z. B. Kugelkoordinaten singulär bei $r = 0$ in dem Sinn, daß dort $\sqrt{g}$ Null und $g^{\vartheta\vartheta}$ und $g^{\varphi\varphi}$ unendlich werden, ohne daß der Raum dort besondere Eigenschaften hat. Ist also die Metrik singulär in einem Punkt, wird man untersuchen, ob sich diese Singularität durch Einführung eines neuen Koordinatensystems beheben läßt. In mehr anschaulich-physikalischer Sprechweise würde man fragen, ob ein frei fallender Beobachter in diesen Punkt gelangen und dort ein lokales Minkowski-System benutzen kann. Wäre beides möglich, würde der Beobachter lokal keinerlei Besonderheiten der physikalischen Gesetze und Erscheinungen bemerken, es würde keine Singularität vorliegen.

Singuläre Punkte oder Linien können auch dadurch entstehen, daß irrtümlich ein Loch in die Welt geschnitten wurde, dessen Rand uns als singulär erscheint. Natürlich kann man einen solchen Schaden durch Wiedereinsetzen eines Stückes Welt reparieren, d. h., durch (analytische) Fortsetzung einer Metrik über ihren zunächst gegebenen Gültigkeitsbereich hinaus und durch unbegrenzte Fortsetzung von Geodäten kann man den Raum vervollständigen.

Im Unterschied zu diesen beiden lokalen Untersuchungen kann man die Eigenschaften einer Singularität auch dadurch erfassen, daß man die topologischen Eigenschaften des Raumes in ihrer Umgebung untersucht und z. B. danach fragt, welche Wechselwirkungsmöglichkeiten zwischen der Außenwelt und der Umgebung der Singularität bestehen, d. h., welche Punkte des Raumes durch Testteilchen oder Lichtstrahlen miteinander in Verbindung treten können.

Am einfachen Beispiel der Schwarzschild-Metrik werden wir einige dieser Fragestellungen verdeutlichen. Zuvor aber noch eine Bemerkung: Der Leser hat vielleicht eine exakte, alle mathematischen und physikalischen Eigenschaften erfassende Definition von Singularität vermißt; die Forschung auf diesem Gebiet ist aber noch nicht so weit fortgeschritten, daß eine solche Definition gegeben werden kann.

## 22.2. Die radialen Geodäten in der Umgebung der Schwarzschild-Singularität

Schon bald nach der Gewinnung der Schwarzschild-Metrik als Lösung der Feldgleichungen stellte man fest, daß auf der „singulären“ Fläche $r = 2M$ sowohl die Determinante der Metrik

$$-g = r^4 \sin^2 \vartheta \tag{22,3}$$

wie auch die dem Krümmungstensor zugeordnete Invariante

$$R_{abcd}R^{abcd} = 48M^2/r^6 \tag{22,4}$$

regulär sind. Dies legte die Vermutung nahe, daß dort keine echte Singularität vorhanden ist, sondern nur das Koordinatensystem singulär wird.

Um die physikalischen Verhältnisse in der Nähe von $r = 2M$ besser zu verstehen, untersuchen wir die radialen Geodäten, über deren Eigenschaften das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2M/r} - (1 - 2M/r)\, c^2\, \mathrm{d}t^2 \tag{22,5}$$

Auskunft gibt. Aus (22,5) oder auch aus (10,26) und (10,27) erhalten wir für die Bahnen von Testteilchen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} &= \pm\sqrt{A^2 - c^2(1 - 2M/r)}, \\ \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{A}{1 - 2M/r}, \end{aligned} \qquad A = \mathrm{const} > 0, \tag{22,6}$$

während für Photonen $\mathrm{d}s^2 = 0$, d. h.

$$\mathrm{d}r = \pm(1 - 2M/r)\, c\, \mathrm{d}t \tag{22,7}$$

gilt.

Für ein Testteilchen (für einen frei fallenden Beobachter) sagen die Gln. (22,5) und (22,6), daß es die unendlich lange Zeit

$$\int \mathrm{d}t = \int_{r_0}^{2M} \frac{A}{c} \frac{\mathrm{d}r}{(1 - 2M/r)\sqrt{A^2 - c^2(1 - 2M/r)}} \to \infty \tag{22,8}$$

braucht, um die endliche Strecke

$$L_0 = \int_{r_0}^{2M} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - 2M/r}} \tag{22.9}$$

(den räumlichen Abstand zwischen $r = r_0$ und $r = 2M$) zurückzulegen, aber schon in endlicher Eigenzeit

$$\tau_0 = \int_{r_0}^{2M} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{A^2 - c^2(1 - 2M/r)}} \tag{22,10}$$

an sein Ziel gelangt. Der frei fallende Beobachter würde also wahrscheinlich gar nichts Besonderes bei $r = 2M$ feststellen; aber die Koordinaten $r$ und $t$ sind zur Beschreibung seiner Bewegung nicht geeignet.

Ein Photon würde ebenfalls eine unendlich lange Zeit, nämlich

$$T_0 = \frac{1}{c} \int_{r_0}^{2M} \frac{\mathrm{d}r}{1 - 2M/r} \tag{22,11}$$

brauchen, um die endliche Strecke $L_0$ (22,9) zurückzulegen — auch hier erweist sich die Koordinatenzeit $t$ als physikalisch nicht brauchbar zur Beschreibung des Vorgangs.

### 22.3. Die Schwarzschild-Lösung in anderen Koordinatensystemen

Wir suchen Koordinatensysteme, die zur Beschreibung physikalischer Vorgänge in der Nähe von $r = 2M$ besser geeignet sind als die Schwarzschild-Metrik, Koordinatensysteme, die eventuell sogar die Raum-Zeit vollkommen überdecken. Dabei müssen wir beachten, daß eine Fortsetzung der Schwarzschild-Metrik aus dem Außenraum über die Fläche $r = 2M$ hinweg nicht unbedingt auf die in (22,1) auch enthaltene Metrik

$$ds^2 = (2M/r - 1)\, c^2\, dt^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{2M/r - 1}, \quad r < 2M \tag{22,12}$$

führen muß, die man ja als Metrik „im Innern" von $r = 2M$ ansprechen könnte (und in der $r$ eine zeitartige, $t$ eine raumartige Koordinate ist). Für $r = 2M$ ist die Metrik (22,1) gar nicht definiert, und bei der Erweiterung der Außenraummetrik über $r > 2M$ hinaus könnte man auch in ein ganz anderes Gebiet der „universellen" Schwarzschild-Lösung gelangen, so wie man beim Überschreiten eines Verzweigungsschnittes in ein anderes Blatt der Riemannschen Fläche einer analytischen Funktion gelangen kann. Wir müssen also unterscheiden zwischen der nur für $r > 2M$ gültigen Schwarzschild-*Metrik* und der allgemeinen Schwarzschild-*Lösung*, die die (noch zu findende) maximale Erweiterung der Schwarzschild-Metrik ist, auch (22,2) als Ausschnitt enthält, aber auch in ganz anderen Koordinaten dargestellt werden kann. Wir werden jetzt drei neue Koordinatensysteme (Metriken) kennenlernen, die jeweils unterschiedliche Ausschnitte der Schwarzschild-Lösung beschreiben.

Eine Anpassung des Koordinatensystems an frei fallende Beobachter kann man durch die Transformation

$$\begin{aligned} dT &= dt + \sqrt{\frac{2M}{r}}\, \frac{dr}{c(1 - 2M/r)}, \\ cT(r, t) &= ct + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \left| \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \right| \end{aligned} \tag{22,13}$$

und

$$\begin{aligned} dR &= c\, dT + \frac{dr\sqrt{r}}{\sqrt{2M}} = c\, dt + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2M}}\, \frac{dr}{1 - 2M/r}, \\ r(R, cT) &= \left[ (R - cT)\, \frac{3\sqrt{2M}}{2} \right]^{2/3} \end{aligned} \tag{22,14}$$

erreichen. Aus der Schwarzschild-Metrik entsteht dabei die Lemaîtresche Metrik (LEMAÎTRE 1933)

$$ds^2 = \frac{2M}{r}\, dR^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\, dT^2, \qquad r = r(R, T). \tag{22,15}$$

$T$ ist offensichtlich die Eigenzeit der Teilchen, die in dem Koordinatensystem (22,15) ruhen; wegen (22,14) und (22,6) gilt $dR = 0$ aber gerade für solche Teilchen, die anfangs im Unendlichen ruhen ($A = c$) und dann radial frei fallen. Das Linienelement (22,15) ist bei $r = 2M$ regulär, ein frei fallender Beobachter stellt dort keine Besonderheiten fest, singulär ist nur der Punkt $r = 0$. Ein Nachteil dieser Metrik ist,

daß die statische Schwarzschild-Lösung mit zeitabhängigen metrischen Funktionen beschrieben wird.

Ein anderes Koordinatensystem bevorzugt Nullgeodäten anstelle der eben benutzten zeitartigen Geodäten. Führt man nämlich durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \mathrm{d}t - \mathrm{d}t^* = \mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}r}{c(1 - 2M/r)}, \\ cv &= ct + r + 2M \ln (r - 2M) - 2M \ln 2M \end{aligned} \tag{22,16}$$

eine retardierte Zeit $v$ ein ($\mathrm{d}t^*$ ist die Zeit, die das radial fallende Photon zum Zurücklegen der Strecke $\mathrm{d}r$ braucht), gelangt man von der Schwarzschild-Metrik (22,1) zur Eddington-Finkelstein-Metrik (EDDINGTON 1924, FINKELSTEIN 1958)

$$\mathrm{d}s^2 = 2c\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - (1 - 2M/r)\,c^2\,\mathrm{d}v^2, \tag{22,17}$$

in der radial einlaufende Lichtstrahlen durch $\mathrm{d}v = 0$ beschrieben werden. Auch in diesen Koordinaten sind die metrischen Funktionen nur bei $r = 0$ singulär (das Verschwinden von $g_{vv}$ bei $r = 2M$ bedeutet keinen Dimensionsverlust, da die Determinante der Metrik (22,17) dort nicht verschwindet). Das Linienelement (22,17) ist nicht invariant gegenüber der Zeitumkehr $v \to -v$, die einer Zeitspiegelung $t \to -t$ und einer Ersetzung der einlaufenden durch auslaufende Photonen entspricht; bei dieser Zeitumkehr entsteht aber wieder ein Ausschnitt der universellen Schwarzschild-Lösung.

Zur maximalen Erweiterung der Schwarzschild-Metrik, also einer Metrik, die alle bisher betrachteten Ausschnitte als Teilräume enthält und nicht weiter fortgesetzt werden kann, gelangt man schließlich durch Einführung der avancierten Zeit $u$,

$$\begin{aligned} cu &= ct - r - 2M \ln (r - 2M) + 2M \ln 2M, \\ c(v - u) &= 2r + 4M \ln (r - 2M) - 4M \ln 2M, \end{aligned} \tag{22,18}$$

in die Metrik (22,17), die dabei (nach Elimination von $\mathrm{d}r$) die Form

$$\mathrm{d}s^2 = r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,(1 - 2M/r) \tag{22,19}$$

annimmt, und durch die anschließenden Koordinatentransformationen

$$v' = \mathrm{e}^{cv/4M}, \qquad u' = -\mathrm{e}^{-cu/4M} \tag{22,20}$$

und

$$z = \tfrac{1}{2}(v' - u'), \qquad w = \tfrac{1}{2}(v' + u'). \tag{22,21}$$

Das Ergebnis ist die Kruskalsche Form der Metrik der Schwarzschild-Lösung (1960)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32M^3}{r}\,\mathrm{e}^{-r/2M}(\mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2) + r^2(w, z)\,(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2), \tag{22,22}$$

die mit der ursprünglichen Schwarzschild-Metrik durch

$$\begin{aligned} z^2 - w^2 &= \frac{1}{2M}(r - 2M)\,\mathrm{e}^{r/2M}, \\ \frac{w}{z} &= \frac{\mathrm{e}^{ct/4M} - \mathrm{e}^{-ct/4M}}{\mathrm{e}^{ct/4M} + \mathrm{e}^{-ct/4M}} = \tanh\frac{ct}{4M} \end{aligned} \tag{22,23}$$

zusammenhängt.

In der Kruskal-Metrik (22,22) sind $\vartheta$ und $\varphi$ Kugelkoordinaten in dem Sinne, daß sie Koordinaten auf den Unterräumen mit Kugelsymmetrie sind; die Koordinaten $z$ und $w$ sind raum- bzw. zeitartig, können positive und negative Werte annehmen, sind aber so zu beschränken, daß $r$ positiv ist.

Wir wollen jetzt kurz darstellen, wie vom Standpunkt der Kruskal-Metrik die Schwarzschild-Metrik und ihre Singularität aussehen. Der Außenraum der Schwarzschild-Metrik ($r > 2M$, $t$ endlich) entspricht dem Gebiet I der Abb. 22.1, in dem

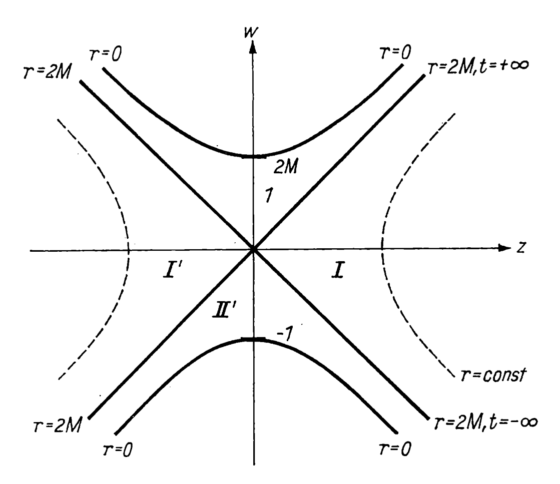



Abb. 22.1
Das Kruskal-Diagramm der Schwarzschild-Lösung ($\vartheta$, $\varphi$ unterdrückt; statt 2M lies 1, statt 1 lies II)

$z > |w|$ gilt. Den Rand dieses Gebietes, der in den $r,t$-Koordinaten durch $t = \pm\infty$ oder/und $r = 2M$ beschrieben wird, bilden die Strahlen $w = \pm z, z \geqq 0$. Überschreitet man diesen Rand in das Gebiet II hinein, d. h. überschreitet man $t = +\infty$, $r = 2M$, gelangt man in das „Innere“ der üblichen Schwarzschild-Metrik; die Eddington-Finkelstein-Metrik (22,17) überdeckt gerade diese beiden Gebiete. Die Gebiete I′ und II′, in die man durch weiteres Variieren der Koordinaten $w$ und $z$ gelangen kann, sind isometrisch (metrisch ununterscheidbar) zu I bzw. II: Die maximale Erweiterung der Schwarzschild-Lösung enthält den äußeren ($r > 2M$) und den inneren ($r < 2M$) Teil der Schwarzschild-Metrik genau je zweimal. Dabei treten keine Grenzen oder Singularitäten auf, mit Ausnahme der (wie man zeigen kann) echten, nicht durch Koordinatentransformationen behebbaren Singularität $r = 0$, die im Kruskal-Diagramm durch zwei Hyperbelbögen dargestellt wird.

Wenn wir uns im Gravitationsfeld eines kugelsymmetrischen Sterns, also im Gebiet I befinden, werden wegen der Existenz des ausgedehnten Sterns (dessen Oberfläche in Abb. 22.1 durch die Linie $r = \text{const}$ dargestellt wird) die Gebiete I′, II und II′ natürlich durch die innere Schwarzschild-Lösung (11,24) zu ersetzen sein. Ehe wir uns der Frage zuwenden, ob und in welcher Weise die vollständige Schwarzschild-Lösung in der Natur realisiert werden kann, wollen wir die physikalischen Konsequenzen der maximalen Erweiterung der Schwarzschild-Metrik genauer diskutieren.

## 22.4. Die Schwarzschild-Lösung als Schwarzes Loch (Black Hole)

Aus der mathematischen Darstellung der Zusammenhangsverhältnisse der Teilgebiete der Schwarzschild-Lösung im vorhergehenden Abschnitt könnte man den Eindruck gewinnen, daß es einem Beobachter möglich sei, von unserer Welt (Gebiet I) durch die Schwarzschild-Singularität $r = 2M$ und den Innenraum (Gebiet II) in eine andere Welt (Gebiet I') zu gelangen, die wieder der Außenraum einer Schwarzschild-Metrik ist. Da dieser Beobachter ja allein bis zum Erreichen von $r = 2M$ unendlich lange Zeit braucht (gemessen in der Eigenzeit der zurückgelassenen Menschheit), wäre er für die Zurückgebliebenen für immer verschwunden; oder: während sie ihn noch unterwegs zu $r = 2M$ glauben, ist er (gemessen in seiner Eigenzeit) längst auf Erkundung in der neuen Welt I'. Um zu sehen, ob solche Reisen möglich sind, müssen wir die Eigenschaften der Geodäten der Schwarzschild-Lösung genauer untersuchen. Unser Reisender muß nicht unbedingt frei fallen (sich auf einer Geodäten bewegen), er darf natürlich auch eine Rakete benutzen; schneller als das Licht kann er aber niemals reisen. Für seine Reisemöglichkeiten und für die physikalischen Beziehungen zwischen den Gebieten der Schwarzschild-Lösung ist deshalb der Verlauf der Nullgeodäten (Lichtstrahlen) besonders wichtig.

Beschränken wir uns auf rein radiale Bewegungen ($\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), dann st das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32M^3}{r}\, \mathrm{e}^{-r/2M}(\mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2) \tag{22,24}$$

für den Verlauf der Geodäten bestimmend. Diese Metrik ist konform flach; die Nullgeodäten ($\mathrm{d}s^2 = 0$) werden wegen

$$\mathrm{d}z = \pm \mathrm{d}w \tag{22,25}$$

unter 45° (135°) geneigte Geraden in der $z,w$-Ebene. Diese einfache Gestalt der Nullgeodäten ist kein Zufall, sie folgt aus der Wahl unserer Koordinaten, die ja der Lichtausbreitung angepaßt wurden.

Trägt man in das Kruskal-Diagramm alle Nullgeodäten ein, die im Gebiet I radial einlaufend ($t$ wächst, $r$ nimmt ab) oder radial auslaufend sind ($t$ wächst, $r$ nimmt zu), und verlängert sie über $r = 2M$ hinaus, erhält man das in Abb. 22.2 skizzierte Ergebnis: Alle radial einwärts gehenden Lichtstrahlen durchstoßen $r = 2M$ (für $t = \infty$), dringen in das Gebiet II ein und enden in der Singularität $r = 0$; alle auswärts laufenden Lichtstrahlen kommen aus dem Gebiet II' bzw. der dortigen Singularität.

Man kann also keine radial gerichteten Lichtstrahlen aus unserer Welt (I) in das Gebiet I' oder II' schicken; nur II ist erreichbar, und wenn das Photon dort ist, kann es der Singularität $r = 0$ nicht entgehen. Man könnte daran denken, die Singularität $r = 0$ durch nicht radial gerichtete Lichtstrahlen oder durch Beobachter mit geeigneten Raketen zu umgehen; wenn jedoch ein Photon oder ein Massenpunkt erst einmal im Gebiet II ist, kann es dem „Fall" nach $r = 0$ nicht entkommen. Hinzunahme neuer Freiheitsgrade zu (22,24) bedeutet z. B. für Photonen wegen

$$\mathrm{d}s^2 = 0 = \frac{32M^3}{r}\, \mathrm{e}^{r/2M}(\mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2) + \mathrm{d}\sigma^2, \qquad \mathrm{d}\sigma > 0, \tag{22,26}$$

daß $\mathrm{d}w^2$ wegen des auch noch zu kompensierenden Terms $\mathrm{d}\sigma^2$ noch größer gegenüber $\mathrm{d}z^2$ sein muß als für radiale Photonen. Die Lichtstrahlen gehen in Abb. 22.2 noch

steiler nach oben und erreichen $r = 0$ noch eher. Ähnliches gilt für Beobachter mit Raketen. Man kann ihr Schicksal auch so beschreiben: Während es in unserem Teil der Welt mit Hilfe von Raketen immer möglich ist, trotz des Schwerefeldes an einem festen Ort zu bleiben, kann $r$ im Gebiet II nicht konstant bleiben; es spielt dort, wie man aus (22,12) abliest, die Rolle einer Zeitkoordinate, und den Ablauf der Zeit kann der Beobachter nicht verhindern. Übrigens ist die Schwarzschild-Lösung im Gebiet II nicht mehr statisch, da der außen in I zeitartige Killing-Vektor hier raumartig wird.

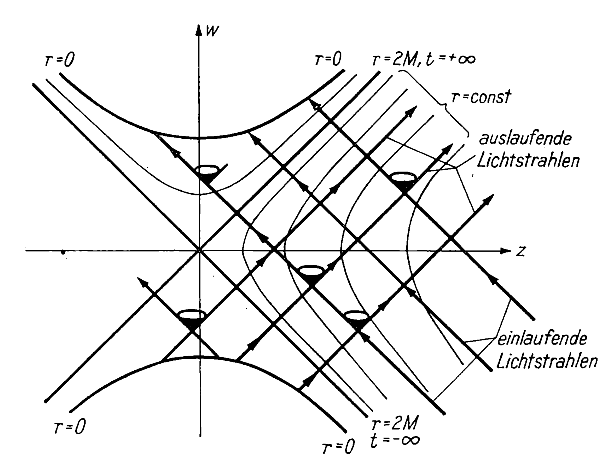



Abb. 22.2
Nullgeodäten und lokale Lichtkegel in der Schwarzschild-Lösung

Kommen wir auf unseren Beobachter zurück, den wir in das Gebiet I′ schicken wollten: Während wir ihn noch unterwegs zu $r = 2M$ glauben, ist er schon längst in der Singularität $r = 0$ im Gebiet II verschollen; I′ und auch II′ kann er nie erreichen.

Wir können also folgende kausale Struktur der Schwarzschild-Lösung konstatieren: Aus unserer Welt I können wir II beeinflussen, aber nicht II′ und I′, und wir können von II′ beeinflußt werden, jedoch nicht von II und I′. Während Gebiet I′ also für uns ziemlich uninteressant ist, ist II für uns ein „Schwarzes Loch" (alles kann hinein, nichts heraus), und II′ ein „Weißes Loch" (nichts kann hinein, alles nur heraus).

Sind dies alles nun nur Spielereien mit mathematischen Konstruktionen? Man ist heute der Meinung, daß in unserer Welt Gravitationsfelder dieser Struktur nicht von Anfang an vorhanden waren, aber eventuell entstanden sind. Wenn sie also erst seit endlicher (Koordinaten-) Zeit existieren, ist II′ für uns uninteressant, in endlicher Zeit kann von dort nichts zu uns gelangen. Da also (wahrscheinlich) von den drei Gebieten I′, II und II′ jenseits der Schwarzschild-Singularität nur II für uns bedeutsam ist, sprechen wir oft von einem „Schwarzen Loch", wenn wir die volle Schwarzschild-Lösung meinen.

Die Entstehungsgeschichte eines Schwarzen Loches, die Entwicklung des Gravitationsfeldes eines normalen Sterns zu einem Feld, dessen Schwarzschild-Radius

$r = 2M$ von außen überschritten werden kann (nicht mehr im Innern des Sterns liegt) — das soll die Aufgabe des nächsten Kapitels sein.

*Literatur zu Kapitel 22.:*

[14], [39], [40], [46], [70], [79], [121], [133], [137], [166], [176].

# 23. Gravitationskollaps — die mögliche Lebensgeschichte eines kugelsymmetrischen Sterns

## 23.1. Die Entwicklungsstufen eines kugelsymmetrischen Sterns

Unsere Welt ist so beschaffen, daß ein Stern, dessen Temperatur über der seiner Umgebung liegt, ständig Energie und damit Masse abgibt, bevorzugt in Form von Strahlung, aber auch in explosionsartigem Ausstoßen von Materie. Wir wollen hier in ganz groben Zügen die Entwicklung skizzieren, die er dabei durchläuft. Sie wird im wesentlichen durch seine angeborenen Eigenschaften (Anfangsmasse, -dichte, ...) und sein Verhalten in den kritischen, katastrophenhaften Phasen seines Lebens charakterisiert und bestimmt.

Erfahrungsgemäß existieren Sterne, nachdem sie sich aus Wasserstoff und Staub gebildet haben, sehr lange. Es gelingt ihnen also fast immer, im Wechselspiel der anziehenden Gravitationskraft, des abstoßenden (temperaturabhängigen) Drucks und der ausgehenden Strahlung einen relativ stabilen Zustand zu finden.

Der erste stabile Zustand wird erreicht, wenn die Gravitationsanziehung die Sternmaterie so weit verdichtet und erhitzt hat, daß die Umwandlung von Wasserstoff in Helium für lange Zeit eine ausreichende Energiequelle ist, um eine Abkühlung zu verhindern und den nötigen Druck (eine hinreichend große thermische Geschwindigkeit der Sternmaterie) zur Kompensation der Schwerkraft aufrecht zu erhalten. Die mittlere Dichte eines solchen Sterns hat die Größenordnung $1\ \mathrm{g/cm^3}$. Ein typisches Beispiel eines solchen Sterns ist unsere Sonne.

Ist der Wasserstoff des Sterns verbraucht, kann der Stern (eventuell erst nach einer instabilen, mit Explosionen verbundenen Phase) auf andere nukleare Prozesse umschalten und Kerne höherer Ordnungszahl erzeugen. Diese Prozesse werden aber jeweils nur kürzere Zeit dauern und schneller nacheinander durchlaufen werden. Bei hinreichend massereichen Himmelskörpern (die Erde wäre dafür zu klein!) ist der dann entstehende Druck so groß, daß die Kerne ihre Elektronen verlieren und ein entartetes Elektronengas entsteht. Die Dichte dieses Sterns liegt bei $10^7\ \mathrm{g/cm^3}$; Sterne solcher Dichte sind als Weiße Zwerge schon gefunden worden. Außerordentlich wichtig in unserem Zusammenhang ist die Tatsache, daß Weiße Zwerge mit einer Masse oberhalb 1,2 Sonnenmassen nicht stabil sein können (ihr Radius beträgt also höchstens 5000 km). Sterne größerer Masse müssen also entweder nach der Wasserstoffverbrennung einen Teil ihrer Masse abstoßen oder einem anderen Endzustand zustreben.

Ist der Druck (die Masse des Sterns) groß genug, kann das dadurch geschehen, daß (ausgehend z. B. von $^{56}\mathrm{Fe}$) die Elektronen und die Protonen der Kerne sich in Neutronen umwandeln und der ganze Stern am Ende aus Kernmaterie dichtester Pak-

kung besteht. Die Dichte solcher Neutronensterne liegt bei $10^{14}$ g/cm$^3$. Obwohl die Einzelheiten der Kernwechselwirkungen nicht genau bekannt sind, kann man doch zeigen, daß Neutronensterne nur stabil sind (der Druck nur dann der Gravitationsanziehung das Gleichgewicht halten kann), wenn ihre Masse die Sonnenmasse nicht wesentlich überschreitet. Neutronensterne haben deshalb Radien von etwa 10 km. Man ist heute überzeugt, daß die sogenannten Pulsare Neutronensterne sind. Pulsare sind Sterne, die in regelmäßigen Abständen von $10^{-3}$ bis 1 s optische oder Radiosignale aussenden; die jeweilige Periode wird dabei so genau eingehalten, daß sie nur durch die Rotation des Sterns verursacht werden kann, und Rotationszeiten dieser Größenordnung sind nur bei außerordentlich kleinen Sternen möglich. Wesentlich für die Frage des Endzustandes eines Sterns ist aber auch hier wieder die Feststellung, daß massereichere Sterne ihr Leben nicht als Neutronensterne beschließen können.

Bevor wir uns dem möglichen Schicksal massereicherer Sterne zuwenden, wollen wir die Einsteinschen Feldgleichungen heranziehen und fragen, welche Aussagen sie über stabile kugelsymmetrische Materieanhäufungen machen.

## 23.2. Die kritische Masse eines Sterns

Wie wir bei der Diskussion der inneren Schwarzschild-Lösung in Kapitel 11. gezeigt haben, wird das Gravitationsfeld im Innern eines statischen kugelsymmetrischen Sterns durch die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\lambda(r)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - \mathrm{e}^{\nu(r)}c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{23,1}$$

beschrieben. Die Materie eines Sterns entspricht in guter Näherung dem Modell eines idealen fluiden Mediums mit der Ruhemassendichte $\mu(r)$ und dem Druck $p(r)$. Aus den Feldgleichungen folgte in einfacher Weise

$$\mathrm{e}^{-\lambda(r)} = 1 - 2m(r)/r, \tag{23,2}$$

wobei $m(r)$ die durch

$$m(r) = \frac{\varkappa c^2}{2}\int_0^r \mu(x)\,x^2\,\mathrm{d}x \tag{23,3}$$

definierte Massenfunktion ist. Die restlichen Feldgleichungen ließen sich unter Verwendung von (23,2) in

$$\nu' = -\frac{2p'}{p + \mu c^2} \tag{23,4}$$

und

$$\varkappa p = \frac{\nu'}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r^3} \tag{23,5}$$

umformen.

Während wir früher diese Feldgleichungen für den Spezialfall $\mu = \mathrm{const}$ integriert haben, wollen wir jetzt eine für beliebiges $\mu(r)$ geltende Aussage ableiten.

Stellen wir uns einen Stern mit endlichem (Koordinaten-) Radius $r_0$ vor. Der Druck $p$ wird an der Oberfläche verschwinden und im Mittelpunkt $r = 0$ des Sterns am größten

sein; er darf dort jedoch nicht unendlich groß werden. Ebenso sollte die Dichte $\mu(r)$ für $r = 0$ endlich bleiben und (aus Stabilitätsgründen) nach außen hin abnehmen:

$$\mu'(r) < 0. \tag{23,6}$$

Da an der Oberfläche $e^\nu$ und seine Ableitung stetig sein müssen, nimmt $m(r)$ dort den Wert

$$m(r_0) = M \tag{23,7}$$

an, wobei $M$ genau der in der äußeren Schwarzschild-Lösung auftretende Massenparameter ist; bei $r = 0$ ist wegen (23,3) $m/r^3$ endlich.

Unter Ziel ist, aus den Endlichkeitsbedingungen für $\mu$ und $p$ eine Bedingung für die bei vorgegebenem $r_0$ maximal mögliche Masse $M$ abzuleiten.

Aus der Feldgleichung (23,5) liest man sofort ab, daß $\nu'/r$ bei $r = 0$ endlich sein muß; führt man statt $e^\nu$ die Funktion $f(r)$ durch

$$f(r) = e^{\nu(r)/2} \tag{23,8}$$

ein, lautet die Forderung also

$$\frac{f'}{rf} \text{ endlich bei } r = 0. \tag{23,9}$$

Durch Elimination von $p$ aus den Gln. (23,4) und (23,5) erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\,\frac{df}{dr}\right] = \frac{f}{\sqrt{1-2m/r}}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{m}{r^3}\right). \tag{23,10}$$

Da wegen der Definition (23,3) $m/r^3$ die mittlere Massendichte der Kugel vom (Koordinaten-) Radius $r$ ist und die mittlere Massendichte mit $r$ nicht zunehmen kann, wenn $\mu$ abnimmt, ist die rechte Seite von (23,10) negativ oder (und dies nur für $\mu = \text{const}$) Null:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\,\frac{df}{dr}\right] \leqq 0. \tag{23,11}$$

An der Oberfläche des Sterns muß die Metrik stetig in die äußere Schwarzschild-Metrik übergehen und der Druck verschwinden, es muß also

$$f^2(r_0) = 1 - \frac{2M}{r_0}, \quad \left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{M}{r_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-2M/r_0}} \tag{23,12}$$

gelten [vgl. (23,5) und (23,8)]. Integriert man (23,11) von $r$ bis $r_0$ unter Benutzung dieser Beziehungen, erhält man

$$f'(r) \geqq \frac{Mr}{r_0^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}. \tag{23,13}$$

Da bei endlichem $f$ und $m$ die rechte Seite von (23,10) endlich ist, wird $f'(r)/r$ beschränkt sein. Die Endlichkeitsbedingung (23,9) für den Druck reduziert sich dann auf die Forderung $f(0) > 0$. Integration von (23,13) zwischen 0 und $r_0$ unter Ver-

wendung von (23,12) gibt aber

$$f(0) \leqq \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{M}{r_0^3} \int\limits_0^{r_0} \frac{r\,\mathrm{d}r}{(1 - 2m/r)^{1/2}}. \tag{23,14}$$

Drücken wir nun $\mu(r)$ durch die konstante Dichte $\mu_0 = 6M/\varkappa c^2 r_0^3$ und den variablen Anteil $\varrho(r)$ aus,

$$\mu = \mu_0 + \varrho, \qquad \int\limits_0^{r_0} \varrho(x)\, x^2\, \mathrm{d}x = 0, \qquad \varrho' \leqq 0, \qquad \varrho(0) \geqq 0, \tag{23,15}$$

dann sehen wir, daß in

$$m(r) = M \frac{r^3}{r_0^3} + \int\limits_0^r \varrho(x)\, x^2\, \mathrm{d}x \tag{23,16}$$

das Integral immer positiv ist. Man kann also die rechte Seite von (23,14) vergrößern, indem man dort $m(r)$ durch $Mr^3/r_0^3$ ersetzt. Wir erhalten damit das Endergebnis der Abschätzungen, nämlich

$$f(0) \leqq \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}. \tag{23,17}$$

Wie wir oben gezeigt haben, ist der Zentraldruck $p(0)$ nur dann endlich, wenn $f(0)$ größer als Null ist. Damit können wir folgende wichtige Aussage formulieren: Ein kugelsymmetrischer Stern kann nur dann in einem stabilen Gleichgewicht sein (kann die eigene Gravitationsanziehung nur dann durch einen endlichen Druck kompensieren), wenn seine Masse $M$ und sein Radius $r_0$ die Ungleichung

$$\frac{2M}{r_0} < \frac{8}{9} \tag{23,18}$$

erfüllen. Für den Spezialfall der inneren Schwarzschild-Lösung mit der Zustandsgleichung $\mu = \text{const}$ hatten wir diese Ungleichung schon in Kapitel 11. abgeleitet. Wir wissen jetzt, daß sie für eine beliebige Zustandsgleichung gilt. Bei der Diskussion dieser Beziehung müssen wir die Definitionen von $M$ bzw. $r_0$ beachten: $M$ ist (bis auf einen Faktor) das Integral der Massendichte $\mu$ über das Koordinatenvolumen; es hat die invariante Bedeutung der im Newtonschen Fernfeld feststellbaren gravitierenden Masse des Sterns. Der Sternradius $r_0$ ist dadurch definiert, daß die Sternoberfläche $4\pi r_0^2$ ist.

Die Ungleichung (23,18) bringt zum Ausdruck, daß ein Stern fester Oberflächengröße nur so lange stabil ist, wie seine Masse unterhalb einer kritischen Masse liegt. Ein Stern, dessen Masse diese Grenze überschreitet, muß unweigerlich infolge seiner zu starken Gravitationsanziehung in sich zusammenstürzen. Während in der linearen Newtonschen Gravitationstheorie ein Überwiegen der Schwerkraft durch eine Kontraktion und die damit verbundene endliche Druckerhöhung oder durch zusätzliche Kräfte kompensiert werden kann, bewirken in der nichtlinearen Einsteinschen Theorie oberhalb der kritischen Masse (23,18) Druckerhöhung oder Zusatzkraft (über den Energieimpulstensor) eine weitere Verstärkung der Gravitation.

Eine Abschätzung der bei vorgegebener, als konstant angenommener Massendichte $\mu$ noch stabilen Masse liefert das Modell der inneren Schwarzschild-Lösung, für das aus (23,3), (23,7) und (23,18) als kritische Masse $M_{\text{krit}}$ (gemessen in Längeneinheiten)

$$M_{\text{krit}} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\varkappa c^2 \mu}} \tag{23,19}$$

folgt. Mit $\varkappa c^2 = 1{,}86 \cdot 10^{-27}$ cm g$^{-1}$ erhält man für typische Dichten die folgenden kritischen Massen, die wir mit der Sonnenmasse $M_\odot$ vergleichen wollen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu$(in g cm$^{-3}$) | 1 | $10^6$ | $10^{15}$ |
| $M_{\text{krit}}$(in cm) | $1{,}685 \cdot 10^{13}$ | $1{,}685 \cdot 10^{10}$ | $0{,}532 \cdot 10^6$ |
| $M_{\text{krit}}/M_\odot$ | $1{,}14 \cdot 10^8$ | $1{,}14 \cdot 10^5$ | 3,96 |

Schon diese sehr grobe Abschätzung zeigt, daß Neutronensterne nur wenige Sonnenmassen haben können; massereichere Sterne haben keinen stabilen Endzustand.

Als ein interessantes Nebenergebnis wollen wir noch vermerken, daß aufgrund der allgemeinen Formel (10,53) und der Ungleichung (23,18) die Rotverschiebung eines von der Oberfläche eines stabilen Sterns kommenden Lichtsignals maximal den Wert $z = 2$ haben kann.

## 23.3. Der Gravitationskollaps

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts haben uns gezeigt: Wenn es einem massereichen kugelsymmetrischen Stern nicht gelingt, auf seinem Weg zum Neutronenstern genügend Masse auszustoßen oder abzustrahlen, gibt es für ihn keinen stabilen Endzustand. Er wird irgendwann den Zustand erreichen, in dem der Druckgradient die Gravitationsanziehung nicht mehr kompensieren kann. Er wird sich infolgedessen ständig weiter zusammenziehen, sein Radius wird den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ unterschreiten und $r = 0$ zustreben: Der Stern erleidet einen Gravitationskollaps.

Natürlich möchte man diese plausiblen anschaulichen Vorstellungen auch rechnerisch an einem Sternmodell mit einer physikalisch vernünftigen Zustandsgleichung (vernünftiger Beziehung zwischen Druck und Massendichte) überprüfen. Das einzige Modell, an dem dies ohne größeren mathematischen Aufwand möglich ist, ist das der inkohärenten Materie ($p = 0$). Nun ist hier wegen des Fehlens eines Druckes von vornherein zu erwarten, daß ein einmal kontrahierender Stern vollständig in einen Punkt „hineinstürzt". Trotzdem ist dieses Beispiel nicht trivial, da es eine im ganzen Raum gültige exakte Lösung der Einsteinschen Gleichungen liefert, die auch für reale kollabierende Sterne einen gewissen Modellcharakter hat.

Als Ausgangspunkt zur Behandlung dieses kollabierenden Staubsterns nehmen wir eine von der früher benutzten Normalform (10,2) abweichende Form des Linienelementes eines kugelsymmetrischen Sterns. Wir erhalten sie, indem wir eine geeignete Transformation $r = r(\varrho, c\tau)$, $t = t(\varrho, c\tau)$ durchführen und damit die Metrik (10,2) in die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\lambda(\varrho, c\tau)}\,\mathrm{d}\varrho^2 + r^2(\varrho, c\tau)\,(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}\tau^2 \tag{23,20}$$

bringen. Die Koordinate $\tau$ ist offensichtlich die Eigenzeit der im Koordinatensystem (23,20) ruhenden Teilchen, und die Kurven $\varrho = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ sind Geodäten. Da sich inkohärente Materie wegen (8,85) immer längs Geodäten bewegt, ist (23,20) ein mit der inkohärenten Materie mitbewegtes System, d. h., der Energieimpulstensor hat

$$T^4_4 = -c^2\mu(\varrho, c\tau) \tag{23,21}$$

als einzige nichtverschwindende Komponente.

Bezeichnen wir mit „$'$" bzw. „$\dot{}$" die partielle Ableitung nach $\varrho$ bzw. $c\tau$, dann erhalten wir aus (23,20) als nichtverschwindende Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \lambda'/2, && \Gamma^1_{22} = -e^{-\lambda}rr', && \Gamma^1_{33} = -e^{-\lambda}rr'\sin^2\vartheta, && \Gamma^1_{14} = \dot\lambda/2,\\ &\Gamma^2_{12} = r'/r, && \Gamma^2_{24} = \dot r/r, && \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, &&\\ &\Gamma^3_{13} = r'/r, && \Gamma^3_{34} = \dot r/r, && \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta, &&\\ &\Gamma^4_{11} = \dot\lambda e^{\lambda}/2, && \Gamma^4_{22} = r\dot r, && \Gamma^4_{33} = r\dot r\sin^2\vartheta && \end{aligned} \tag{23,22}$$

mit $x^1 = \varrho$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = c\tau$. Die Feldgleichungen haben schließlich die Gestalt

$$R^1_1 - \frac{R}{2} = \frac{r'^2}{r^2}\,e^{-\lambda} - \frac{2\ddot r}{r} - \frac{\dot r^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{23,23}$$

$$R^2_2 - \frac{R}{2} = R^3_3 - \frac{R}{2} = \left(\frac{r''}{r} - \frac{r\lambda''}{2r}\right)e^{-\lambda} - \frac{\dot r\dot\lambda}{2r} - \frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\ddot r}{r} = 0, \tag{23,24}$$

$$R^4_4 - \frac{R}{2} = \left(\frac{2r''}{r} - \frac{\lambda' r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)e^{-\lambda} - \frac{\dot r\dot\lambda}{r} - \frac{\dot r^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = -\varkappa\mu c^2, \tag{23,25}$$

$$R_{14} = \dot\lambda r'/r - 2\dot r'/r = 0. \tag{23,26}$$

Für diese Gleichungen lassen sich recht einfache erste Integrale gewinnen. Als erstes können wir (23,26) als

$$\dot\lambda = (r'^2)^{\cdot}/r'^2 \tag{23,27}$$

schreiben und durch

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 - \varepsilon f^2(\varrho)}, \quad \varepsilon = 0, \pm 1 \tag{23,28}$$

integrieren mit $f(\varrho)$ als beliebiger Funktion. Einsetzen in (23,23) führt auf

$$2\ddot r r + \dot r^2 = -\varepsilon f^2. \tag{23,29}$$

Wählt man hier $r$ als unabhängige und $u = \dot r^2$ als neue abhängige Variable, erhält man die einfache lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}(ru) = -\varepsilon f^2, \tag{23,30}$$

deren Lösung

$$\dot r^2 = -\varepsilon f^2(\varrho) + F(\varrho)/r \tag{23,31}$$

ist. Eliminiert man jetzt $f^2$ in (23,28) mit Hilfe von (23,31), dann sieht man, daß (23,24) identisch erfüllt ist und (23,25) auf

$$\varkappa\mu c^2 = \frac{F'}{r'r^2} \tag{23,32}$$

führt.

Die partielle Differentialgleichung (23,31) läßt sich vollständig integrieren, da $\varrho$ nur die Rolle eines Parameters spielt. Für $\varepsilon \neq 0$ kann man durch

$$\mathrm{d}\eta = f\,\mathrm{d}c\tau/r \tag{23,33}$$

die Differentialgleichung in die Form

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{F}{f^2}\,r - \varepsilon r^2 \tag{23,34}$$

bringen und durch

$$\begin{aligned} r &= \frac{F(\varrho)}{2f^2(\varrho)}\,h_\varepsilon'(\eta), \\ c\tau - c\tau_0(\varrho) &= \pm\frac{F(\varrho)}{2f^3(\varrho)}\,h_\varepsilon(\eta), \end{aligned} \qquad h_\varepsilon(\eta) = \begin{cases} \eta - \sin\eta & \text{für } \varepsilon = +1 \\ \sinh\eta - \eta & \text{für } \varepsilon = -1 \end{cases} \tag{23,35}$$

lösen, während für $\varepsilon = 0$ unmittelbar aus (23,31)

$$c\tau - c\tau_0(\varrho) = \pm\tfrac{2}{3}\,r^{3/2}F(\varrho)^{-1/2}, \qquad \varepsilon = 0 \tag{23,36}$$

folgt.

Die allgemeine kugelsymmetrische Lösung der Feldgleichungen für den Fall inkohärenter Materie (Tolman-Lösung, 1934) hat also in mitbewegten Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\varrho^2}{1 - \varepsilon f^2(\varrho)} + r^2(\varrho, c\tau)\,(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}\tau^2, \\ \varkappa c^2\mu(\varrho, c\tau) &= \frac{F'(\varrho)}{r^2\,\partial r/\partial\varrho}, \end{aligned} \tag{23,37}$$

wobei $r(\varrho, c\tau)$ aus (23,35) bzw. (23,36) zu entnehmen ist. Von den drei freien Funktionen $F(\varrho)$, $f(\varrho)$ und $\tau_0(\varrho)$ haben höchstens zwei eine physikalische Bedeutung, da die Koordinate $\varrho$ nur bis auf eine Skalentransformation $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(\varrho)$ definiert ist. Man kann zwar die Massenverteilung $\mu(\varrho, c\tau)$ nicht einfach vorgeben und die Metrik dann bestimmen, aber doch durch geeignete Vorgabe von $f$, $F$ und $\tau_0$ sinnvolle Massenverteilungen erzeugen. Da Materieschichten, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit radial bewegen, einander überholen und dabei durchdringen können, ist in den hier benutzten mitbewegten Koordinaten mit dem Auftreten von Koordinatensingularitäten zu rechnen.

Wir wollen jetzt die Tolmansche Lösung auf das Problem eines endlich ausgedehnten Sternes anwenden. Wir müssen dazu eine innere ($\mu \neq 0$) und eine äußere ($\mu = 0$) Lösung gewinnen und diese beiden Lösungen an der Sternoberfläche ($\varrho = \varrho_0$) stetig aneinander anschließen.

Die einfachste *innere Lösung* erhalten wir, wenn $\mu$ nicht vom Ort (von $\varrho$) abhängt und $r$ (bei geeigneter Eichung von $\varrho$) die Gestalt $r = K(c\tau)\,\varrho$ hat. Diese Einschrän-

kungen führen auf

$$f = \varrho, \quad F = \frac{\varkappa \hat{M}}{3} \varrho^3, \quad \mu c^2 K^3(c\tau) = \hat{M} = \text{const}, \quad \tau_0 = 0 \tag{23,38}$$

und die Metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= K^2(c\tau)\left[\frac{d\varrho^2}{1-\varepsilon\varrho^2} + \varrho^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] - c^2\, d\tau^2, \\ K(\eta) &= \frac{\varkappa\hat{M}}{6}\, h_\varepsilon'(\eta), \qquad c\tau = -\frac{\varkappa\hat{M}}{6}\, h_\varepsilon(\eta), \\ h_\varepsilon(\eta) &= \begin{cases} \eta - \sin\eta & \varepsilon = +1 \\ \eta^3/6 \qquad \text{für} & \varepsilon = 0 \\ \sinh\eta - \eta & \varepsilon = -1. \end{cases} \end{aligned} \tag{23,39}$$

Wie ein Vergleich mit (21,32) zeigt, ist das Innere $\varrho \leqq \varrho_0$ des Sterns ein dreidimensionaler Raum konstanter Krümmung, dessen Radius $K$ zeitabhängig ist (in der Sprache der kosmologischen Modelle ist es ein Ausschnitt eines Friedmann-Kosmos, vgl. Abschnitt 26.2.). Ein Großkreis auf der Sternoberfläche hat den Radius $\varrho_0 K(c\tau)$, und wegen der Zeitabhängigkeit von $K$ expandiert oder kontrahiert der Stern.

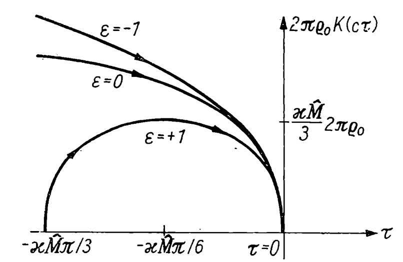



Abb. 23.1
Umfang eines kollabierenden Sterns als Funktion der Zeit

Wie Abb. 23.1 zeigt, entsprechen Modelle mit $\varepsilon = 0, -1$ Sternen, deren Radius von beliebig großen Werten aus ständig abnimmt, bis zur Zeit $\tau = 0$ ein Kollaps stattfindet, während Modelle mit $\varepsilon = +1$ Sterne darstellen, die zunächst bis zu einem Maximalwert expandieren und dann in sich zusammenstürzen.

Die *Lösung im Außenraum* des Sterns ist offensichtlich eine kugelsymmetrische Vakuumlösung, und wegen des Birkhoffschen Satzes kann es sich nur um die Schwarzschild-Lösung handeln (vgl. Abb. 23.2). Da die Tolmansche Lösung (23,37) für beliebige Massendichte $\mu$ gilt, muß sie auch die äußere Schwarzschild-Lösung $\mu = 0$

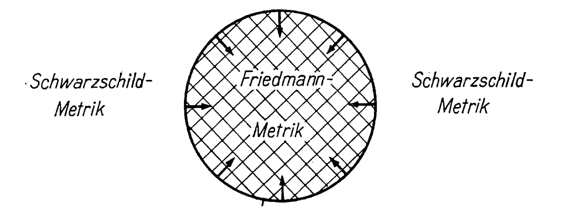



Abb. 23.2
Momentaufnahme eines kollabierenden Sterns

als Spezialfall ($F = \text{const}$) enthalten. In der Tolmanschen Lösung sind die Koordinaten im Außenraum so gewählt, daß die Sternoberfläche ruht; in der üblichen Schwarzschild-Metrik dagegen bewegt sich die Sternoberfläche. In beiden Fällen erfolgt aber die Bewegung eines Teilchens der Oberfläche auf einer Geodäten. Die Gl. (22,6) der radialen Geodäten der Schwarzschild-Metrik, nämlich

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = A^2 - c^2 + 2Mc^2/r, \tag{23,40}$$

muß deshalb für $\varrho = \varrho_0$ für alle Zeiten $\tau$ mit (23,31) übereinstimmen, d. h., es muß

$$F = 2M \tag{23,41}$$

gelten. Da noch Skalentransformationen $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(\varrho)$ möglich sind, ist $f(\varrho)$ hier nicht eindeutig bestimmbar; wir werden $f(\varrho)$ im folgenden auch nicht benötigen.

Wir müssen jetzt dafür sorgen, daß die innere Lösung (23,39) und die äußere Lösung (23,35) bis (23,37), (23,41) an der Sternoberfläche $\varrho = \varrho_0$ stetig ineinander übergehen. Notwendige Bedingung dafür ist offensichtlich

$$r(\varrho_0, c\tau) = K(c\tau)\,\varrho_0. \tag{23,42}$$

Wählen wir den Zeitnullpunkt der Außenmetrik so, daß $\tau_0(\varrho_0) = 0$ gilt, dann kann für $\varepsilon \neq 0$ die Beziehung (23,42) für alle Zeiten $\tau$ nur bei gleicher funktionaler Abhängigkeit beider Seiten von $\tau$, d. h. nur bei gleichem Vorfaktor von $h_\varepsilon(\eta)$ in (23,35) bzw. (23,39), erfüllt werden. Dies führt auf die Bedingung

$$6M/f^3(\varrho_0) = \varkappa\mu c^2 K^3, \tag{23,43}$$

aus der zusammen mit den genannten Gleichungen $f(\varrho_0) = \varrho_0$ und schließlich

$$\varkappa\mu c^2 \varrho_0^3 K^3 = 6M \tag{23,44}$$

folgt. Für $\varepsilon = 0$ erhält man unmittelbar aus (23,36), (23,39) und (23,42) die gleiche Bedingung. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß bei Erfüllung von (23,44) die Metrik auf der Sternoberfläche stetig ist und auch die Normalableitungen das geforderte Stetigkeitsverhalten (16,34) haben.

Durch die Bedingung (23,44) werden die Massendichte $\mu$ des Sterns und sein Koordinatenradius $K\varrho_0$ mit dem nach außen wirksamen Schwarzschildschen Massenparameter $M$ verknüpft, ähnlich wie es in Gl. (11,23) beim Anschluß von innerer und äußerer Schwarzschild-Lösung geschah. Beachtet man den Zusammenhang (10,21), also die Beziehung $2M = \varkappa mc^2/4\pi$ zwischen Schwarzschild-Radius $2M$ und der Masse $m$, die wir in der Newtonschen Gravitationstheorie der Quelle der Schwarzschild-Lösung zuordnen würden, dann gilt

$$\frac{4\pi}{3}\,\mu\varrho_0^3 K^3(c\tau) = \frac{4\pi}{3}\,\mu r_0^3 = m. \tag{23,45}$$

Man beachte, daß $m$ nur für $\varepsilon = 0$ gleich dem — in der inneren Metrik (23,39) berechneten — Integral über die Massendichte $\mu$ ist.

Die hier gefundene Lösung für das Gravitationsfeld eines kollabierenden Sterns zeigt deutlich, daß im Sterninnern auch dann keine Besonderheiten auftreten, wenn die Sternoberfläche $\varrho = \varrho_0$ *innerhalb* des Schwarzschild-Radius $r = K(c\tau)\,\varrho_0 = 2M$ liegt; erst bei $K(c\tau) = 0$ wird das Innenfeld singulär.

Zum Abschluß dieser Überlegungen wollen wir noch das Schicksal eines kollabierenden Sterns im Kruskalschen Raum-Zeit-Diagramm verfolgen. Dazu zeichnen wir eine radiale Geodäte, auf der sich die Oberflächenpunkte des Staubsterns bewegen (Abb. 23.3). Links von ihr (in der Abbildung schraffiert) befindet sich das Sterninnere, mit einer bis auf den Punkt $\tau = 0$ (von außen: $r = 0$) regulären Metrik. Während des Kollaps öffnet sich für den im Außenraum Beobachtenden ein Teil des Gebietes II; die Gebiete I′ und II′ (vgl. Abb. 22.2) werden beim Kollaps nicht realisiert.

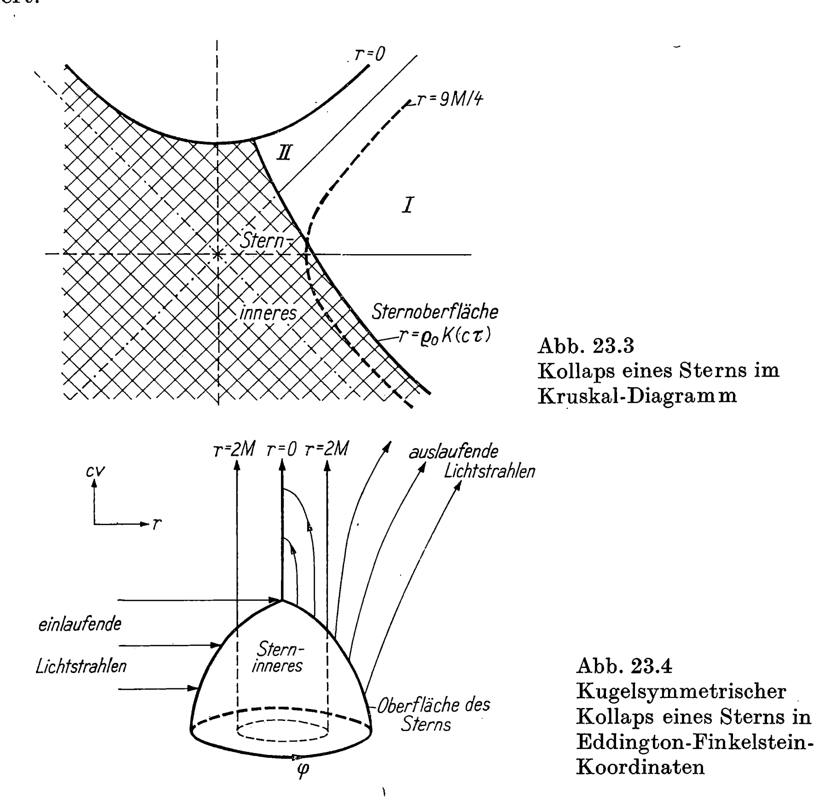



Abb. 23.3
Kollaps eines Sterns im Kruskal-Diagramm

Abb. 23.4
Kugelsymmetrischer Kollaps eines Sterns in Eddington-Finkelstein-Koordinaten

Für manche Zwecke noch anschaulicher ist eine Darstellung des Kollaps in den Eddington-Finkelstein-Koordinaten (22,17), da man hier leichter einen der beiden Rotationsfreiheitsgrade mit darstellen kann (wir erinnern noch einmal daran, daß die Eddington-Finkelstein-Koordinaten gerade die Gebiete I und II des Kruskal-Diagramms beschreiben, also genau die beim Kollaps wesentlichen Teile der Schwarzschild-Lösung erfassen). Man sieht in Abb. 23.4, wie sich der Stern zusammenzieht, bis er hinter dem Schwarzschild-Radius $r = 2M$ verschwindet, d. h., bis es den auslaufenden Lichtstrahlen

$$c\,\mathrm{d}v = \frac{2\,\mathrm{d}r}{1 - 2M/r} \tag{23,46}$$

nicht mehr gelingt, in den Außenraum zu kommen ($\mathrm{d}v < 0$ für $r > 2M$!). Die radial

einlaufenden Lichtstrahlen

$$dv = 0 \tag{23,47}$$

können jedoch immer die Sternoberfläche (oder die Singularität $r = 0$) erreichen. Bei der Interpretation der Abb. 23.4 oder ähnlicher Zeichnungen muß man beachten, daß sich in der Zeichenebene die metrischen Verhältnisse einer zweidimensionalen Riemannschen Fläche nicht korrekt erfassen lassen; wesentlich sind immer die durch Lichtstrahlen oder Geodäten dargestellten physikalischen Wechselwirkungsmöglichkeiten.

*Literatur zu Kapitel 23.:*

[17], [39], [40], [46], [70], [79], [170].

# 24. Rotierende Schwarze Löcher

## 24.1. Die Kerr-Lösung

Die meisten uns bekannten Sterne rotieren relativ zum lokalen Inertialsystem (relativ zum Fixsternhimmel) und sind infolgedessen nicht kugelsymmetrisch. Ihr Gravitationsfeld wird also nicht durch die Schwarzschild-Lösung beschrieben. Während in der Newtonschen Gravitationstheorie das Feld zwar wegen der Rotationsabplattung des Sterns verändert, jedoch nach wie vor statisch ist, wirkt in der Einsteinschen Theorie auch der Materiestrom felderzeugend: Die Metrik wird zwar zeitunabhängig sein (bei zeitunabhängiger Rotation des Sterns), aber nicht invariant gegen Zeitumkehr. Wir erwarten also, daß das Gravitationsfeld eines rotierenden Sterns durch eine axialsymmetrische stationäre Vakuumlösung dargestellt wird, die in großer Entfernung von der Quelle in einen flachen Raum übergeht. Je nach der Massenverteilung im Innern des Sterns wird es verschiedene Typen von Vakuumfeldern geben, die sich — in der Sprache der Newtonschen Gravitationstheorie — z. B. durch die Multipolmomente der Massenverteilung unterscheiden. Eine dieser Lösungen ist die 1963 — fast 50 Jahre nach der Schwarzschild-Metrik — gefundene Kerr-Lösung. Sie erwies sich als besonders wichtig für das Verständnis des Gravitationskollaps eines rotierenden Sterns. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei betont, daß die Kerr-Lösung nicht das Gravitationsfeld eines beliebigen axialsymmetrischen rotierenden Sterns, sondern nur das Außenfeld einer sehr speziellen Quelle ist.

Wir wollen jetzt die Kerr-Lösung und ihre Eigenschaften kennenlernen; da ihre mathematische Struktur schon ziemlich kompliziert ist, werden wir auf eine Ableitung aus den Einsteinschen Feldgleichungen verzichten.

Das Linienelement der Kerr-Metrik hat in den sogenannten Boyer-Lindquist-Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\vartheta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - c^2\, dt^2 \\ &\quad + \frac{2Mr}{\Sigma}(a\sin^2\vartheta\, d\varphi - c\, dt)^2, \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2\cos^2\vartheta, \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \end{aligned} \tag{24,1}$$

Es geht für sehr große $r$ in das Linienelement eines flachen Raumes über. Aus der Struktur des Fernfeldes kann man die Bedeutung der beiden Parameter $M$ und $a$ erschließen: Transformiert man nämlich *im Fernfeld* durch $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vartheta = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right)$, $\varphi = \arctan(y/x)$ die Metrik (24,1) auf „kartesische Koordinaten", so erhält man

$$g_{4x} = 2May/r^3, \qquad g_{4y} = -2Max/r^3, \qquad g_{4z} = 0 \tag{24,2}$$

und

$$g_{44} = 1 - 2M/r. \tag{24,3}$$

Durch Vergleich mit der für jedes Fernfeld geltenden Darstellung (13,32) und (13,33) können wir ablesen, daß $M$ die Masse und $Ma$ die $z$-Komponente (der Betrag) des Drehimpulses der Quelle des Kerr-Feldes ist. Diese physikalische Deutung der beiden Konstanten der Kerr-Metrik wird dadurch noch gefestigt, daß für $a = 0$ (fehlende Rotation) aus (24,1) die Schwarzschild-Metrik entsteht und daß die Kerr-Metrik gegenüber der Transformation $t \to -t$, $a \to -a$ (Zeitumkehr und gleichzeitige Umkehr des Rotationssinns) invariant ist.

Die Boyer-Lindquist-Koordinaten sind verallgemeinerte Schwarzschild-Koordinaten und wie diese nicht geeignet, die Lösung in ihrem vollen mathematischen Gültigkeitsbereich zu beschreiben. Die Koordinaten (24,1) werden offensichtlich für $\Delta = 0$ singulär, wenn $0 < a^2 < M^2$ gilt, und zwar für die beiden Werte

$$\begin{aligned} r_+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2}, \\ r_- &= M - \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{24,4}$$

Für $a = 0$ geht $r_+$ in den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ über, während $r_-$ Null wird. Den Parameterbereich $M^2 < a^2$, der sehr schnell rotierenden Körpern entsprechen würde, wollen wir im folgenden nicht weiter beachten. Vermutlich tritt er bei Feldern realer Quellen nicht auf (sie würden auseinanderfliegen, bevor sie so schnell rotieren).

Analog dem Übergang von Schwarzschild-Koordinaten zu Eddington-Finkelstein-Koordinaten kann man auch die Kerr-Lösung in eine Form transformieren, die bei $r_\pm$ keine Singularitäten hat. Man führt dazu durch

$$c\,\mathrm{d}v = c\,\mathrm{d}t + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\,\mathrm{d}r \tag{24,5}$$

eine der Lichtausbreitung angepaßte neue Zeitkoordinate $v$ und durch

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\varphi + \frac{a}{\Delta}\,\mathrm{d}r \tag{24,6}$$

eine neue „Winkelkoordinate" $\Phi$ ein, die das Mitrotieren des lokalen Inertialsystems berücksichtigt (man vergleiche dazu unsere Diskussion der Wirkung eines Drehimpulses in Abschnitt 13.5.). Das Ergebnis dieser Transformationen ist die Kerr-Lösung in den Kerr-Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \Sigma\,\mathrm{d}\vartheta^2 - 2a\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Phi + 2c\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v \\ & + \frac{\sin^2\vartheta}{\Sigma}\left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\vartheta\right]\mathrm{d}\Phi^2 \\ & - \frac{4M}{\Sigma}\,ra\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\Phi\,c\,\mathrm{d}v - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)c^2\,\mathrm{d}v^2. \end{aligned} \tag{24,7}$$

Die Kerr-Lösung besitzt (wie jede axialsymmetrische stationäre Metrik) zwei vertauschbare Killing-Vektoren, nämlich — in den Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ oder $(r, \vartheta, \Phi, cv)$ — die Vektoren

$$\eta^i = (0, 0, 1, 0), \qquad \xi^i = (0, 0, 0, 1). \tag{24,8}$$

Der Killing-Vektor $\xi^i$, der im Fernfeld der Stationarität (Zeitunabhängigkeit) zugeordnet ist, hat eine interessante Eigenschaft. Sein Betrag

$$\xi_i \xi^i = -(1 - 2Mr/\Sigma) \tag{24,9}$$

wechselt das Vorzeichen beim Überschreiten der Fläche

$$\Sigma - 2Mr = r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \vartheta = 0. \tag{24,10}$$

Innerhalb dieser Fläche ist der Killing-Vektor $\xi^i$ raumartig, die Metrik ist dort nicht mehr stationär. Man nennt diese Fläche deshalb auch *Grenzfläche der Stationarität.*

Die physikalischen Eigenschaften der Kerr-Raum-Zeit wird man (wie bei der Schwarzschild-Lösung) am besten dadurch erforschen, daß man die möglichen Bahnkurven von Testteilchen oder Photonen untersucht. Die Einzelheiten, die man dadurch zusammentragen kann, sind aber so kompliziert und verwirrend, daß wir auf eine eingehende Darstellung mit Beweisen verzichten und nur die wichtigsten Ergebnisse qualitativ diskutieren wollen.

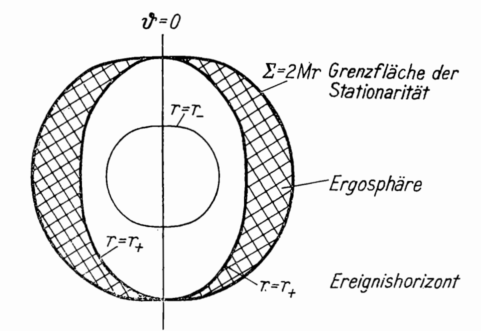



Abb. 24.1
Die Grenzflächen der Kerr-Lösung

Wenn wir uns (Abb. 24.1) — aus dem Fernfeld kommend — der Singularität der Kerr-Lösung nähern, stoßen wir zuerst auf die Grenzfläche der Stationarität (24,10). Zwischen ihr und der Fläche $r = r_+$ liegt die sogenannte *Ergosphäre.* Teilchen und Lichtstrahlen können von außen in sie eindringen und sie wieder verlassen. Sogar folgender physikalischer Prozeß ist denkbar: Ein Teilchen positiver Energie $E_0$,

$$-m_0 u_i \xi^i = E_0 > 0, \tag{24,11}$$

fällt von außen auf einer Geodäten in die Ergosphäre; dabei bleibt $E_0$ erhalten [vgl. (19,53)]. Das Teilchen zerfällt dann unter Erhaltung des Viererimpulses in zwei Teile:

$$m_0 u^i = m_1 u_1{}^i + m_2 u_2{}^i. \tag{24,12}$$

Da der Killing-Vektor $\xi^i$ wegen (24,9) im Innern der Ergosphäre raumartig ist, kann man den zeitartigen Vektor $u_1{}^i$ so wählen, daß $E_1 = -m_1 u_1{}^i \xi_i$ negativ ist (im Außen-

raum ist dies unmöglich, weil dort $\xi^i$ zeitartig und das Produkt zweier zeitartiger Vektoren immer negativ ist). Es gilt dann

$$-m_2 u_2{}^i \xi_i = E_2 = E_0 - E_1 > E_0, \tag{24,13}$$

das Teilchen verläßt die Ergosphäre wieder und hat eine größere Energie als das hineingeschossene Teilchen. Energielieferant für diesen Prozeß ist die Rotation der Quelle.

Die Fläche $r = r_+$ kann zwar von außen mit Teilchen oder Photonen überschritten werden, es ist Photonen oder Teilchen aber unmöglich, den Innenraum zu verlassen: Die Kerr-Metrik beschreibt wie die Schwarzschild-Lösung das Gravitationsfeld eines Schwarzen Loches. Da alle „Ereignisse", die sich im Inneren von $r = r_+$ abspielen, wie Zerfall oder Aussendung von Testteilchen oder realen Teilchen, einem äußeren Beobachter nicht zu Gesicht kommen (kein Photon von dort kann ihn erreichen), nennt man diese Fläche auch den *Ereignishorizont.*

Weiter im Innern folgt dann die Fläche $r = r_-$, die keine besondere physikalische Bedeutung hat, und schließlich erreicht man $r = 0$ — eine ringförmige und nicht, wie man zunächst vermuten könnte, eine punktförmige Singularität.

Die bisher diskutierten Gebiete der Kerr-Lösung entsprechen den Gebieten I und II des Kruskal-Diagramms (Abb. 22.1) der Schwarzschild-Lösung. Auch für die Kerr-Metrik ist eine maximale Erweiterung, d. h. eine mathematische Erschließung der den Gebieten I' und II' entsprechenden Teile, möglich.

## 24.2. Gravitationskollaps — die mögliche Lebensgeschichte eines rotierenden Sterns

Die Lebensgeschichte eines rotierenden Sterns unterscheidet sich von der in Abschnitt 23.1. skizzierten Lebensgeschichte eines kugelsymmetrischen Sterns nicht durch die Stufen und die Reihenfolge der energieliefernden Prozesse und der möglichen Endstadien dieser Prozesse, sondern durch die Einwirkung der Rotation auf die Kontraktionsphasen des Sterns. Wenn ein rotierender Stern sich sehr stark zusammenzieht, wird er wegen der Drehimpulserhaltung immer schneller rotieren und eventuell in einzelne Stücke zerreißen (nur der Kern zieht sich weiter zusammen). Oder, anders gewendet: Ein Stern kann im allgemeinen nur dann extrem kontrahiert werden (z. B. bis zu einem Neutronenstern), wenn er Drehimpuls an seine Umgebung abgeben kann; dies kann durch Massenabstoßung oder Gravitationswechselwirkung mit anderen Massen geschehen. Wenn er jedoch am Ende bei sehr hoher Dichte noch genügend Masse besitzt, werden die Gravitationskräfte so stark, daß der Gravitationskollaps eintritt; als äußeres Gravitationsfeld bleibt die Kerr-Lösung zurück. Obwohl diese Vorstellungen recht plausibel sind und sich durch eine große Zahl von Fakten und Rechnungen stützen lassen, sind zwei Lücken in der Theorie des Gravitationskollaps eines rotierenden Sterns heute noch nicht geschlossen.

Die erste Lücke ist das Fehlen einer inneren Kerr-Lösung. Man kennt noch keine (stabile oder instabile) Lösung mit vernünftiger Zustandsgleichung für das Innere eines Sterns, die sich an der Sternoberfläche an die Kerr-Metrik anschließen läßt; man kennt auch keine zeitlich veränderliche Lösung (innere und äußere), deren Außenraumteil sich beim Kollaps des Sterns in eine Kerr-Metrik verwandelt. Aus diesem Grunde kann man nicht genau sagen, wie der Kollaps im einzelnen vor sich geht.

Die zweite Lücke unseres gegenwärtigen Wissens äußert sich in unserer Unkenntnis darüber, ob bei einem Gravitationskollaps immer eine Kerr-Metrik entsteht oder

ob es noch anders beschaffene (singuläre) Vakuumlösungen gibt, die das Endstadium des Gravitationsfeldes eines kollabierten Sterns beschreiben. Man vermutet, daß der Stern entweder überhaupt nicht kollabiert oder eben einer Kerr-Metrik zustrebt; der Beweis dafür steht aber noch aus. Die (vermutete) Einzigartigkeit der Kerr-Lösung wäre eine typische Eigenschaft der Einsteinschen Theorie: Nur 2 Parameter, nämlich die Masse $M$ und der Drehimpuls $Ma$, kennzeichnen das Gravitationsfeld eines kollabierten Sterns, im Unterschied zu den unendlich vielen Parametern (Multipolmomenten) eines nicht kollabierten Sterns. Für den Kollaps selbst bedeutet diese Beschränkung auf 2 Parameter, daß der Stern alle nicht in dieses Schema passenden höheren Momente durch Massenausstoß oder -abstrahlung verlieren muß, bevor er hinter dem Ereignishorizont verschwindet.

## 24.3. Einige Eigenschaften Schwarzer Löcher

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften der Schwarzen Löcher zusammenstellen und dabei besonders die berücksichtigen, die für einen im Außenraum befindlichen Beobachter wichtig sind. Zum Teil werden wir dabei die in den Kapiteln 22. bis 24. bisher gesagten Dinge wiederholen, aber auch Neues bringen und insbesondere berücksichtigen, daß ein Schwarzes Loch geladen sein kann (die dann zuständige Kerr-Newman-Lösung enthält die Kerr-Lösung als Spezialfall).

1. Schwarze Löcher sind Lösungen der Feldgleichungen, die das Gravitationsfeld kollabierter Massen beschreiben. Dieses Feld wird durch drei Parameter gekennzeichnet: durch die Masse $M$, den Drehimpuls $Ma$ und die elektrische Ladung $Q$. Ein Beobachter im Außenraum kann diese drei Parameter durch Beobachtung der Bahnkurven ungeladener bzw. geladener Teilchen bestimmen. Etwaige andere physikalische Eigenschaften, die die Quelle des Feldes vor dem Kollaps hatte (Baryonenzahl, elektrisches Dipolmoment, ...) gehen beim Kollaps verloren. Das Verhältnis zwischen Drehimpuls und dem durch die Rotation erzeugten magnetischen Moment ist übrigens das gleiche („anomale“) wie beim Elektron.

2. Schwarze Löcher enthalten einen geschlossenen Ereignishorizont. Innerhalb dieser Fläche ist das Gravitationsfeld so stark, daß Teilchen, Lichtstrahlen und innen erzeugte zeitabhängige Felder das Gebiet nicht mehr verlassen können. Teilchen und Lichtstrahlen von außen können den Horizont durchdringen; sie brauchen dafür (von einem entfernten Beobachter aus gesehen) unendlich lange Zeit. Ein Beobachter kann den Horizont in endlicher Eigenzeit überwinden und sich innen (hoffentlich) von der Richtigkeit der hier dargestellten Theorie überzeugen; er kann aber nie nach außen darüber berichten.

3. Im Innern des Ereignishorizontes gibt es eine echte Singularität des Gravitationsfeldes, die sich während des Kollaps bildet. Glücklicherweise ist die Welt so beschaffen, daß unsere Augen (wegen des Ereignishorizontes) diese Singularität nicht sehen können („cosmic censorship“), sie ist für die Physik in der Außenwelt ohne Bedeutung.

4. Ein einmal vorhandenes Schwarzes Loch ist (wahrscheinlich) stabil und kann nicht wieder zerstört werden. Materie (Masse, Strahlung), die von außen in das Schwarze Loch gelangt, kann zwar die Ladung $Q$, die Masse $M$ und den Drehimpuls $P = aM$ verändern (der „unverdauliche Rest“ an physikalischen Eigenschaften der zugeführten Materie wird in Form von Strahlung emittiert, natürlich von außerhalb

des Horizontes). Bei all diesen Prozessen kann aber die Größe

$$A = 4\pi[2M^2 - Q^2 + 2(M^4 - M^2Q^2 - P^2)^{1/2}] \tag{24,14}$$

nur zunehmen. $A$ hat in der Kerr-Metrik (24,7) die anschauliche Bedeutung des Flächeninhalts der Fläche $r = \text{const} = r_+$, $v = \text{const}$ (des Ereignishorizontes). Man nennt diesen Satz (wegen gewisser Analogien zur Thermodynamik) auch den zweiten Hauptsatz der Dynamik Schwarzer Löcher.

Die Umformung

$$M^2 = \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi P^2}{A} + \frac{\pi Q^4}{A} + \frac{Q^2}{2} \tag{24,15}$$

der Gl. (24,14) zeigt deutlich, daß man zwar auf Kosten der Ladung und des Drehimpulses Energie (Masse) aus dem Schwarzen Loch gewinnen, aber dabei $M = (A/16\pi)^{1/2}$ nicht unterschreiten kann. Diese Aussagen gelten auch für die mögliche Vereinigung von zwei Schwarzen Löchern zu einem. Vereinigen sich z. B. zwei kugelsymmetrische Schwarze Löcher (Masse $M_1$ bzw. $M_2$) zu einem wiederum kugelsymmetrischen Schwarzen Loch, dann muß

$$16\pi M^2 = A \geqq A_1 + A_2 = 16\pi(M_1^2 + M_2^2) \tag{24,16}$$

gelten, es kann höchstens der Anteil

$$\eta = \frac{M_1 + M_2 - M}{M_1 + M_2} \leqq 1 - \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{M_1 + M_2} \leqq 1 - 1/\sqrt{2} \tag{24,17}$$

der Masse in Form von Gravitationsstrahlung abgegeben werden.

5. Die Einbeziehung der Quantentheorie kann das bisher beschriebene Bild grundlegend ändern. Wir werden hierauf in Abschnitt 30.4. noch einmal eingehen.

## 24.4. Kann und darf es Schwarze Löcher geben?

Die Frage, ob es diese Schwarzen Löcher mit so merkwürdigen Eigenschaften wirklich geben kann und der Gravitationskollaps eines Sterns real geschieht, kann man von unterschiedlichen Standpunkten aus beantworten.

Am einfachsten ist natürlich der simple Hinweis auf die Einsteinsche Theorie und die Tatsache, daß Schwarze Löcher strenge Lösungen der Feldgleichungen sind. Da die Einsteinsche Theorie die Gesetze der Natur richtig darstellt, ist nach allen bisherigen Erfahrungen mit Naturgesetzen anzunehmen, daß auch die theoretisch erschlossenen Materieeigenschaften in der Natur verwirklicht werden. Rein logisch gesehen, hat man mit dem Hinweis auf die Einsteinsche Theorie aber eigentlich nur die innere Widerspruchsfreiheit der mathematischen Theorie der Schwarzen Löcher gezeigt.

Diese eben skizzierte Antwort ist jedoch unbefriedigend. Von dem erkenntnistheoretischen Unbehagen, das die Existenz eines Ereignishorizontes bereiten mag, kann man sich befreien: Das Fehlen einer echten Wechselwirkung mit der Materie hinter dem Horizont ist nur scheinbar; wenn die Materie hinter dem Horizont verschwunden ist, hat sie eben *nur* noch die Eigenschaft Masse, Drehimpuls und Ladung, und diese wirken nach außen, sind bestimmbar und (mit Einschränkungen)

sogar von außen veränderbar. Mit unseren bisherigen, d. h. in schwach gekrümmten Räumen entwickelten, physikalischen Vorstellungen und Begriffen können wir jedoch das Schicksal eines kollabierenden Sterns, der in einen Punkt zusammenstürtzt, oder eines hinter den Ereignishorizont geschickten Beobachters nur formal beschreiben, aber nicht eigentlich verstehen. Es ist sicher, daß irgendwann Quanteneffekte berücksichtigt werden müssen; aber vielleicht ist überhaupt diese weite Extrapolation des Gültigkeitsbereichs der Einsteinschen Theorie unzulässig. Wie, wo und ob die Einsteinsche Theorie abgeändert werden muß, kann aber nur durch mathematische Erkundung eben dieser Theorie und Vergleich dieser Ergebnisse mit den (astrophysikalischen) Beobachtungen festgestellt werden.

Gibt es nun in unserem Universum irgendwo Schwarze Löcher? Erleiden Sterne einen Gravitationskollaps und ist ihr Endstadium dann ein Schwarzes Loch oder eine ganz andere Art von Singularität?

Der Gravitationskollaps selbst ist mit großer Wahrscheinlichkeit mit einem explosionsartigen Ausstoßen von Materie verbunden, so daß der Stern plötzlich aufleuchten würde, etwa in Form einer Supernova. Aber dieses Aufleuchten allein ist nicht beweiskräftig, es könnte auch nur die Bildung eines Neutronensterns anzeigen. Da sich das Fernfeld eines Schwarzen Lochs in nichts von dem eines gewöhnlichen Sterns unterscheidet, können nur Vorgänge in der Nähe des Horizontes zum wirklichen Nachweis dienen.

Der Verdacht auf die Existenz eines Schwarzen Lochs liegt nahe, wenn man aus Beobachtungen auf das Vorhandensein eines kleinen, massereichen, nichtleuchtenden Sterns schließen muß, z. B. als Partner eines Doppelsternsystems. Man hat dann den Einfluß dieses Sterns auf Photonen und Teilchen, die dem vermuteten Ereignishorizont sehr nahe kommen, in allen Einzelheiten zu prüfen. Da Materie, die in ein rotierenden Schwarzes Loch fällt, sich zunächst in einer Scheibe in der Symmetrieebene anreichert und dann, beim endgültigen Absturz, stark beschleunigt und zum Aussenden von Strahlung (Röntgenstrahlung, Gravitationswellen, ...) angeregt wird, sind auch starke Röntgenquellen geringer Ausdehnung mögliche Kandidaten für Schwarze Löcher. Mehrere solcher Röntgenquellen, darunter ein Stern im Sternbild Schwan (Cyg X1) und auch das Zentrum unserer Calaxis, sind zur Zeit im Gespräch.

Die Frage, ob es in unserer Welt Schwarze Löcher gibt, kann noch nicht mit hinreichender Sicherheit beantwortet werden. Die Antwort, mag sie nun bejahend oder verneinend ausfallen, wird aber auf jeden Fall unsere Kenntnisse über die Eigenschaften von Raum und Zeit, also über die Eigenschaften der Gravitationswechselwirkung der Materie, wesentlich erweitern.

*Literatur zu Kapitel 24.:*

[32], [34], [39], [40], [46], [70], [79]. [82], [102], [111], [155], [157].

# Kosmologie

Gravitationskräfte sind die einzigen zur Zeit bekannten Kräfte, die langreichweitig sind (im Gegensatz z. B. zu den Kernkräften) und nicht kompensiert werden können (es gibt keine negativen Massen). Es ist deshalb zu erwarten, daß sie für große, über weite Raumgebiete verteilte Materie die entscheidenden Kräfte sein werden und damit die Entwicklung und Dynamik des Kosmos bestimmen.

## 25. Die Robertson-Walker-Metriken und ihre Eigenschaften

### 25.1. Das kosmologische Prinzip und die Robertson-Walker-Metriken

Die Kosmologie macht Aussagen über die ganze Welt; woher wissen wir eigentlich, daß wir dabei nicht in der Lage des Fisches der Abb. 25.1 sind? Der menschlichen Beobachtung ist ja nur ein endlicher Teil der Welt zugänglich, und selbst diesen (räumlichen) Teil kennen wir nur über eine sehr kurze Zeit: das Planetensystem einige tausend Jahre, andere Galaxien vielleicht hundert Jahre. Die Antwort auf diese Frage lautet: Wie in vielen anderen Gebieten der Naturwissenschaften, so kann auch in der Kosmologie jede neue Entdeckung das Gebäude unserer Erkenntnis revolutionieren, unser gegenwärtiges Bild vom Kosmos ist keineswegs vollkommen und gesichert. Es hat sich aber bisher immer bewährt, von der universellen Gültigkeit von Naturgesetzen auszugehen, stark vereinfachte Modelle der Wirklichkeit durchzu-

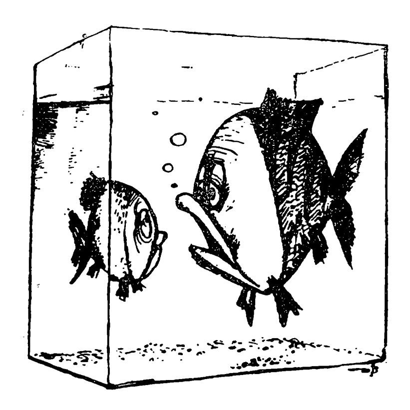


Abb. 25.1
Das kosmologische Prinzip

„Die Welt, mein Sohn, ist ein großer Kasten voller Wasser."

rechnen und mit den Beobachtungen zu vergleichen und so schrittweise Modelle und Formulierung der Naturgesetze der Realität anzugleichen.

Das einfachste Modell des Kosmos erhalten wir aus dem kosmologischen Prinzip, d. h. aus der Annahme, daß es im Ruhesystem der Materie keinen ausgezeichneten Punkt und keine ausgezeichnete Richtung gibt, die dreidimensionale Welt überall gleich beschaffen ist. Ein Blick auf den Sternenhimmel (der ja gleichmäßig hell oder schwarz sein müßte) zeigt uns, daß dieses Modell sehr stark vereinfacht und die Welt bestenfalls im Mittel überall gleich ist. Wie groß die räumlichen Bereiche sind, über die zu mitteln wäre, weiß man nicht — auf jeden Fall sind auch die Galaxien nicht gleichmäßig verteilt, sondern neigen zur Haufenbildung. Trotzdem kann dieses einfachste Kosmosmodell eine Reihe von Beobachtungen überraschend gut erklären.

Übersetzt in die Sprache der Riemannschen Geometrie, behauptet das kosmologische Prinzip offenbar, daß der dreidimensionale Ortsraum ein Raum maximaler Symmetrie, d. h. ein Raum konstanter Krümmung ist, dessen Krümmung aber zeitabhängig sein kann:

$$\overset{(3)}{\mathrm{d}s^2} = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = K^2(ct)\,\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{(1 + \varepsilon r^2/4)^2}$$

$$= K^2(ct)\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1 - \varepsilon\bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] = K^2(ct)\,\mathrm{d}\sigma^2, \qquad \varepsilon = 0, \pm 1. \tag{25,1}$$

Da das Auftreten von Termen $g_{4\alpha}$ in der vollen Raum-Zeit-Metrik eine räumliche Richtung bevorzugt und $g_{44}(x^\alpha)$ die Abhängigkeit der Eigenzeit eines ruhenden Teilchens vom Ort bedeutet, entsprechen nur die Robertson-Walker-Metriken (R-W-Metriken, 1936)

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\,\mathrm{d}\sigma^2 - c^2\mathrm{d}t^2 \tag{25,2}$$

dem kosmologischen Prinzip. Die Metrik dieser Modelle ist also schon durch die Symmetrieforderungen weitgehend bestimmt; die Einsteinschen Feldgleichungen können (wenn sie überhaupt erfüllbar sind) nur noch das zeitliche Verhalten des Kosmos — die Funktion $K(ct)$ — und die Art des Ortsraumes — Wahl von $\varepsilon$ — festlegen. Aus den in Abschnitt 21.2. erläuterten Gründen nennt man $K$ den Weltradius, obwohl $K$ nur für geschlossene Ortsräume ($\varepsilon = +1$) diese anschauliche Interpretation gestattet.

In den nächsten Abschnitten wollen wir zunächst einige physikalische Eigenschaften der Metriken (25,2) diskutieren und erst im Kapitel 26. Folgerungen aus den Einsteinschen Gleichungen ziehen.

## 25.2. Die Bewegung von Teilchen und Photonen in Robertson-Walker-Metriken

Wenn wir bei der Einführung des Koordinatensystems einen Punkt in der Welt (den Nullpunkt des Koordinatensystems) auszeichnen, können wir die R-W-Metriken auch in der Form

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\,[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)\,(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)] - c^2\,\mathrm{d}t^2,$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{für } \varepsilon = 1 \\ \chi & \text{für } \varepsilon = 0 \\ \sinh\chi & \text{für } \varepsilon = -1 \end{cases} \tag{25,3}$$

benutzen. Die Koordinate $\chi$ hat fast unmittelbar die Bedeutung des radialen Abstandes von dem ausgezeichneten Punkt: Der Abstand $D$ eines in dem Koordinatensystem (25,3) ruhenden Sterns vom Nullpunkt ist

$$D = K(ct)\,\chi. \tag{25,4}$$

Wenn sich der Weltradius $K$ zeitlich ändert, ändern sich auch die Entfernungen der Sterne und Galaxien untereinander, so wie sich die Abstände fester Punkte (feste Koordinaten) auf einem Luftballon ändern, der aufgeblasen oder aus dem Luft abgelassen wird. Die hierdurch verursachte Geschwindigkeit $\dot{D}$ ist dem Abstand proportional:

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\dot{K}}{K}\,cD. \tag{25,5}$$

Ein Testteilchen oder ein Photon, das sich kräftefrei bewegt, beschreibt bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems eine rein „radiale" Bahnkurve $\chi(\tau)$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, d. h. eine Geodäte der Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\,\mathrm{d}\chi^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2. \tag{25.6}$$

Für ein Testteilchen der Masse $m_0$ folgt aus der Geodätengleichung der Erhaltungssatz

$$K^2(ct)\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{K^2}{\sqrt{1 - \dfrac{K^2}{c^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right)^2}}\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \text{const}. \tag{25,7}$$

Bezeichnet man $K\,\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}t$ als Geschwindigkeit $v$ und $p = mv = m_0 v\,/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ als Impuls des Teilchens, dann lautet der Erhaltungssatz (25,7) in dreidimensionaler Form

$$pK = \text{const}, \tag{25,8}$$

d. h., bei kräftefreier Bewegung ist das Produkt von Impulsbetrag und Weltradius konstant.

Für Photonen wird man ein ähnliches Ergebnis erwarten, d. h. eine Abhängigkeit der Wellenlänge bzw. Frequenz eines einmal ausgesandten Photons vom Weltradius $K$. Wir wollen die Formel gleich für den allgemeineren Fall ableiten, daß Quelle und Beobachter sich gegenüber dem Koordinatensystem (das wir später als das Ruhesystem der Materie identifizieren werden) beliebig bewegen (vgl. Abb. 25.2).

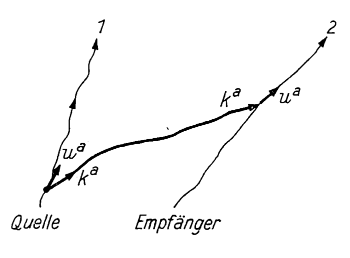



Abb. 25.2
Zur Frequenzänderung eines Photons im Gravitationsfeld

Die Weltlinie $x^a(v)$ (Nullgeodäte) eines Photons definiert den Nullvektor $k^a = \mathrm{d}x^a/\mathrm{d}v$ bis auf einen längs der Weltlinie konstanten Faktor eindeutig, wenn wir als Parameter $v$ einen affinen Parameter benutzen, d. h. einen solchen, der die Geodätengleichung auf die Form $k_{a;b}k^b = 0$ bringt (vgl. Abschnitt 8.4.). Die Frequenz $\nu$, die ein mit der Vierergeschwindigkeit $u^a$ bewegter Beobachter diesem Photon zuordnet, ist proportional zur zeitartigen Komponente von $k^a$ am Ort und im Ruhesystem des Beobachters, also proportional zu $k^a u_a = g_{ab}u^a k^b$. Die im Ruhesystem der Quelle bzw. des Beobachters gemessenen Frequenzen verhalten sich demnach wie

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{(k^a u_a)_1}{(k^a u_a)_2} = \frac{(g_{ab}k^a u^b)_1}{(g_{ab}k^a u^b)_2}. \tag{25,9}$$

Diese Formel beschreibt sowohl die Frequenzveränderung infolge Relativbewegung (Abhängigkeit von $u^a{}_1$ und $u^a{}_2$), d. h. den Doppler-Effekt, wie auch die Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld (Abhängigkeit von der Metrik) und zeigt, daß im allgemeinen beide Effekte nur künstlich, in koordinatensystemabhängiger Weise getrennt werden können.

Wenden wir die Formel (25,9) auf Quelle und Empfänger an, die im Koordinatensystem (25,6) ruhen, haben wir

$$u^a = (0, 0, 0, c), \qquad k_a = (1, 0, 0, -1/K) \tag{25,10}$$

einzusetzen und erhalten

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{K(ct_2)}{K(ct_1)} \tag{25,11}$$

oder

$$\nu K = \mathrm{const}, \tag{25,12}$$

in vollkommener Analogie zu (25,8).

Üblicherweise drückt man die Frequenzänderung des im Punkte *2* empfangenen Lichtes durch die *Rotverschiebung* (relative Wellenlängenänderung)

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \tag{25,13}$$

aus. (25,11) ergibt damit die Beziehung

$$z = \frac{K(ct_2)}{K(ct_1)} - 1 \tag{25,14}$$

zwischen Rotverschiebung $z$ des z. B. auf der Erde zur Zeit $t_2$ empfangenen Lichtes und den Weltradien zu seiner Aussende- bzw. Empfangszeit.

Untersucht man auf der Erde in der Gegenwart $t = t_2$ das von einem Stern zur Zeit $t = t_1$ ausgesandte Licht, dann kann man, wenn sich der Weltradius nicht zu schnell ändert und die Lichtlaufzeit $t_2 - t_1$ nicht zu groß ist, $K(ct_1)$ durch die ersten Terme der Taylor-Reihe

$$K(ct) = K(ct_2)\,[1 + Hc(t - t_2) - \tfrac{1}{2}\,qH^2c^2(t - t_2)^2 + \ldots] \tag{25,15}$$

ersetzen. Die in dieser Entwicklung auftretenden Parameter sind die Hubble-Zahl

$$H(ct_2) = \dot{K}(ct_2)/K(ct_2) \tag{25,16}$$

und der Beschleunigungsparameter (Verzögerungsparameter)

$$q(ct_2) = -\ddot{K}(ct_2)\, K(ct_2)/\dot{K}^2(ct_2)\,. \tag{25,17}$$

Einsetzen der Reihe (25,15) in die Gl. (25,14) gibt die Beziehung

$$z = Hc(t_2 - t_1) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) H^2c^2(t_2 - t_1)^2 + \dots \tag{25,18}$$

zwischen Rotverschiebung $z$ und Lichtlaufzeit $t_2 - t_1$.

Üblicherweise überprüft man die Gültigkeit oder Anwendbarkeit des Modells einer Robertson-Walker-Metrik auf unseren Kosmos an der Beziehung zwischen Rotverschiebung und Entfernung der Quelle. Da für Licht $\mathrm{d}s^2 = 0$ gilt, folgt aus (25,6) und (25,15) in erster Näherung

$$\chi = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{c\,\mathrm{d}t}{K(ct)} \approx \frac{c(t_2 - t_1)}{K(ct_2)} + \frac{Hc^2(t_2 - t_1)^2}{2K(ct_2)} + \dots, \tag{25,19}$$

also unter Verwendung von (25,4) und (25,5)

$$z = HD + (q + 1)\, H^2 \frac{D^2}{2} + \dots = \frac{\dot{D}}{c} + \frac{1}{2c^2}\,(\dot{D}^2 - D\ddot{D}) + \dots \tag{25,20}$$

Die Rotverschiebung ist *in erster Näherung* proportional zum gegenwärtigen Abstand $D$ der Quelle bzw. gleich dem Verhältnis von (kosmologischer) Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ der Quelle zur Lichtgeschwindigkeit.

### 25.3. Entfernungsmessung und Horizonte in Robertson-Walker-Metriken

Die Entfernungsbestimmungen der Astronomie erfolgen meistens mit den Vorstellungen und Begriffen eines dreidimensionalen euklidischen Raumes. Wir wollen deshalb kurz darstellen, wie die Gesetze der Lichtausbreitung in R-W-Metriken die Entfernungsbestimmungen beeinflussen.

Eine Möglichkeit zur Entfernungsbestimmung eines Objekts ist der Vergleich seiner (als bekannt angesehenen) absoluten Helligkeit $L$, definiert als pro Zeiteinheit insgesamt ausgestrahlte Energie, mit der scheinbaren Helligkeit $l$, der in der Zeiteinheit pro Einheitsfläche am Empfänger ankommenden Energie. Man definiert den *Helligkeitsabstand* $D_\mathrm{L}$ durch

$$D_\mathrm{L} = \sqrt{L/4\pi l} \tag{25,21}$$

so, daß im euklidischen Raum Helligkeitsabstand und geometrischer Abstand übereinstimmen. In einer R-W-Metrik besteht dann ein komplizierter Zusammenhang zwischen wahrem Abstand $D = K\chi$ und Helligkeitsabstand $D_\mathrm{L}$ (vgl. Abb. 25.3). Die von der Quelle $\chi = 0$ ausgehenden Photonen verteilen sich nach Zurücklegung des Koordinatenintervalls $\chi$ ja nicht auf die Fläche $4\pi\chi^2$, sondern — in der Metrik (25,3) — auf die Fläche

$$F = 4\pi f^2(\chi)\, K^2(ct_2)\,. \tag{25,22}$$

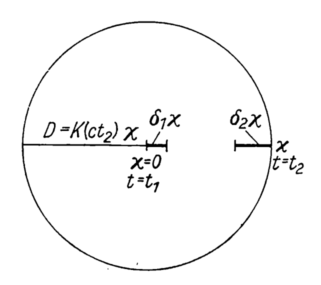



Abb. 25.3
Zur Beziehung zwischen scheinbarer Helligkeit und Koordinatenabstand

Außerdem verteilen sich wegen $ds^2 = 0$, d. h. wegen

$$K\,d\chi = c\,dt, \tag{25,23}$$

die während des Zeitintervalls $\delta t$ ausgesandten Photonen in der Nähe der Quelle auf das Intervall $\delta_1\chi = c\,\delta t/K(ct_1)$, während beim Empfänger in der Zeit $\delta t$ alle Photonen ankommen, die in einem Intervall $\delta_2\chi = c\,\delta t/K(ct_2)$ liegen. Und drittens hat sich durch das Gravitationsfeld auch die Energie eines einzelnen Photons um den Faktor $K(ct_1)/K(ct_2)$ geändert. Insgesamt erhalten wir also für die scheinbare Helligkeit

$$l = \frac{L}{4\pi f^2(\chi)\,K^2(ct_2)}\,\frac{K^2(ct_1)}{K^2(ct_2)}, \tag{25,24}$$

d. h. die Beziehung

$$D_{\mathrm{L}} = \frac{f(\chi)\,K^2(ct_2)}{K(ct_1)} = (1 + z)\,D\,\frac{f(\chi)}{\chi} \tag{25,25}$$

zwischen Helligkeitsabstand $D_{\mathrm{L}}$, Koordinatenabstand $\chi$, Abstand $D$ (zur Zeit $t_2$) und Rotverschiebung $z$ einer Lichtquelle. Da man Sterne mit $z > 2$ beobachtet, können sich $D$ und $D_{\mathrm{L}}$ beträchtlich voneinander unterscheiden.

Eine zweite Möglichkeit der Entfernungsbestimmung ist der Vergleich des wahren Durchmessers $\Delta$ eines Systems mit dem Winkel $\delta$, unter dem es von der Erde aus gesehen wird. Im euklidischen Raum gilt natürlich

$$D_{\mathrm{W}} \equiv D = \Delta/\delta \tag{25,26}$$

für diese durch Winkelmessung bestimmte Entfernung $D_{\mathrm{W}}$.

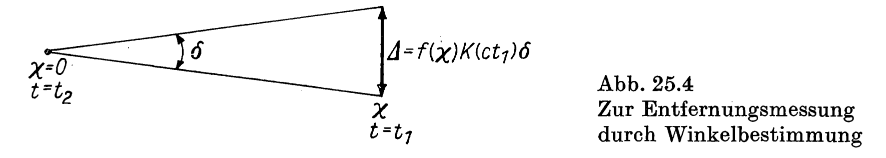



Abb. 25.4
Zur Entfernungsmessung durch Winkelbestimmung

In einer R-W-Metrik folgt jedoch aus (25,3) gemäß Abb. 25.4

$$D_{\mathrm{W}} = \frac{\Delta}{\delta} = f(\chi)\,K(ct_1) = \frac{D}{1+z}\,\frac{f(\chi)}{\chi}. \tag{25,27}$$

Diese beiden Beispiele für Entfernungsbestimmungen zeigen deutlich, wie über die Gesetze der Lichtausbreitung die Raumkrümmung in astronomische Überlegungen hineinspielt. Dabei können unvermutete Effekte auftreten: Wenn z. B. bei wach-

sendem $f(\chi)$ die Funktion $K(ct_1)$ mit $t_1$ abnimmt, kann von zwei Objekten gleicher Ausdehnung das weiter entfernte den größeren Winkeldurchmesser haben.

Natürlich kann man auf optischem Wege Entfernungen nur von solchen Objekten bestimmen, deren Licht uns erreicht. Im flachen Raum können wir im Prinzip jeden auch noch so weit entfernten Lichtblitz sehen, wir müssen wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit nur genügend lange warten. In einem gekrümmten Raum sind die Verhältnisse jedoch komplizierter. Nehmen wir zur Illustration eine Fliege (ein Photon), die mit konstanter Geschwindigkeit vom Südpol eines Luftballons losspaziert; kann man durch genügend schnelles Aufblasen (Vergrößern des Krümmungsradius) verhindern, daß die Fliege den Nordpol erreicht?

Licht, das zur Zeit $t_1$ im Nullpunkt $\chi = 0$ ausgesandt wird, hat wegen (25,23) bis zur Zeit $t_2$ die Punkte mit

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{c\,\mathrm{d}t}{K(ct)} \tag{25,28}$$

erreicht. Wenn wir wissen wollen, ob wir im gegenwärtigen Zeitpunkt $t = t_2$ alle Sterne sehen können, müssen wir untersuchen, ob das am Weltanfang $t_\mathrm{A}$ (dem frühestmöglichen Zeitpunkt) ausgesandte Licht der am weitesten entfernten Sterne uns erreichen kann bzw. ob unser am Weltanfang im Nullpunkt des Koordinatensystems ausgesandtes Signal bis zur Gegenwart alle Sterne erreicht hat. Je nach Weltmodell ist dabei der Weltanfang $t_\mathrm{A} = -\infty$ oder die erste in der Vergangenheit liegende Nullstelle von $K(ct)$ (in der die Metrik singulär wird); zum Gebrauch der Termini „Weltanfang" und „Weltende" vgl. Abschnitt 27.2.

In der Gegenwart $t = t_2$ können wir also Sterne bis zur maximalen Koordinatenentfernung

$$\chi_\mathrm{P} = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_2} \frac{c\,\mathrm{d}t}{K(ct)} \tag{25,29}$$

sehen. Ist dieser Wert $\chi_\mathrm{P}$ kleiner als die maximale Koordinatenentfernung (die in geschlossenen Kosmen $\pi$, in offenen $\infty$ ist), sind also nicht alle Sterne sichtbar, dann definiert $\chi_\mathrm{P}$ den Horizont, bis zu dem wir sehen können. Wir nennen ihn den *Teilchenhorizont*.

Ändert sich z. B. der Weltradius nach dem Gesetz $K(ct) = ct^2$ und befinden wir uns in der Kontraktionsphase $t < 0$, dann gilt für den Beobachtungszeitpunkt $t_2 = -1$

$$\chi_\mathrm{P} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1\,, \tag{25,30}$$

d. h., in diesem Weltmodell gibt es einen Teilchenhorizont.

Eine andere physikalisch interessante Frage ist die, ob wir (durch die dabei ausgesandten Photonen) von jedem irgendwann irgendwo in der Welt vorkommenden Ereignis erfahren werden oder ob uns das zu früh eintretende Weltende $t_\mathrm{E}$ ($t_\mathrm{E} = \infty$ oder die nächste in der Zukunft liegende Nullstelle von $K(ct)$) daran hindert. Äquivalent dazu ist die Frage, ob unser in der Gegenwart $t = t_2$ ausgesandtes Lichtsignal bis zum Weltende $t_\mathrm{E}$ alle Punkte der Welt erreicht. Da dieses Lichtsignal maximal die

Koordinatenentfernung

$$\chi_E = \int_{t_2}^{t_E} \frac{dct}{K(ct)} \qquad (25,31)$$

zurücklegt, gibt es einen *Ereignishorizont* $\chi_E$, wenn $\chi_E$ kleiner als $\pi$ bzw. $\infty$ ist: Von Ereignissen, die in der Gegenwart $t = t_2$ in größerer Entfernung als $\chi_E$ stattfinden, werden wir niemals etwas erfahren.

Die Abb. 25.5 und 25.6 geben ein qualitatives Bild der Wirkungszusammenhänge beim Auftreten von Horizonten.

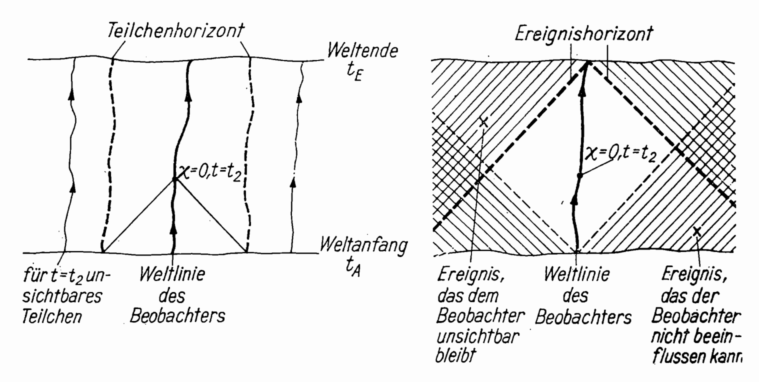



Abb. 25.5.
Teilchen- und Ereignishorizont

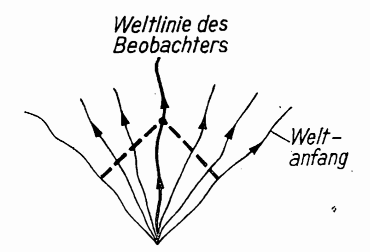



Abb. 25.6
Weltmodell ohne Ereignishorizont: Der vom Beobachter ausgehende Vergangenheitslichtkegel schneidet die Weltlinien *aller* Teilchen

Einer möglichen Fehlinterpretation der Bedeutung der Horizonte soll noch entgegengetreten werden. Sollte es in unserer Welt einen Ereignishorizont geben, also Ereignisse, von denen wir nie etwas erfahren können, dann würde das nicht das Fehlen einer Wechselwirkung mit diesem Teil der Welt oder die Feststellung einer prinzipiellen Nichterkennbarkeit implizieren. Unser (recht armseliges) Weltmodell setzt ja von Anfang an voraus, daß die Welt überall gleich beschaffen ist; wir wissen also von vornherein, daß hinter dem Horizont dasselbe Gravitationsfeld, dieselbe Massendichte usw. vorhanden sind wie bei uns, ohne das Vorhandensein auch dieser Massen wäre der Raum in unserer Umgebung nicht homogen und isotrop. Die Ereignisse, die wir nicht feststellen können, betreffen nur Testteilchen, d. h. Teilchen ohne gravitative Wechselwirkung, und auch die sind nur für uns nicht feststellbar, wirken aber auf näher gelegene Beobachter.

## 25.4. Physik in geschlossenen Kosmen

Es existiert eine Vielzahl von Weltmodellen (bisher haben wir in den Robertson-Walker-Metriken nur die primitivsten kennengelernt), die sich nicht immer in signifikanter Weise voneinander unterscheiden, da sie kontinuierlich ineinander übergehen. Es gibt jedoch Charakteristika von Räumen, die sich in ganzen Zahlen ausdrücken lassen; zu ihnen gehört die Eigenschaft eines Kosmos, offen oder geschlossen zu sein. Man kann erwarten, daß sich geschlossene Kosmen auch in physikalisch deutlicher Weise von offenen unterscheiden und dieser Unterschied eventuell sogar zu auf der Erde nachprüfbaren Aussagen führt. Wir wollen deshalb einige Eigenschaften geschlossener Kosmen mit R-W-Metrik ausführlicher darstellen.

Wie sich durch Ausrechnen des Weyl-Tensors (18,1) oder durch explizite Durchführung einer Koordinatentransformation zeigen läßt, sind alle R-W-Metriken konform flach. Beschränken wir uns auf den geschlossenen Raum

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\,[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)] - c^2\,\mathrm{d}t^2, \tag{25,32}$$

dann nimmt das Linienelement nach den Transformationen

$$T = \int \frac{\mathrm{d}t}{K(ct)} \tag{25,33}$$

und

$$r = \frac{2\sin\chi}{\cos\chi + \cos cT}, \qquad c\eta = \frac{2\sin cT}{\cos\chi + \cos cT} \tag{25,34}$$

die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{K^2(ct)}{4}\,[\cos\chi + \cos cT]^2\,[\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}\eta^2] \tag{25,35}$$

an, es unterscheidet sich nur durch einen Konformfaktor von dem eines Minkowski-Raumes.

Wie man aus der Transformationsformel (25,34) unmittelbar abliest, hat diese Aussage nur eine lokale Bedeutung: Die Beziehungen (25,34) bilden einen Ausschnitt $(\cos\chi + \cos cT) \neq 0$ der gekrümmten Raum-Zeit auf den vollen Minkowski-Raum ab, eine eindeutige Abbildung der Metriken (25,35) und (25,32) aufeinander ist unmöglich.

Abbildungen der eben dargestellten Art, bei der eine unendlich ausgedehnte Raum-Zeit mit Hilfe eines Konformfaktors auf ein endlich ausgedehntes Gebiet abgebildet wird, benutzt man gern zur qualitativen Diskussion der Verhältnisse im Unendlichen. Wichtig dabei ist, daß bei einer konformen Abbildung Lichtstrahlen (Nullgeodäten) in Lichtstrahlen übergehen: Aus $\mathrm{d}s^2 = 0$ folgt auch $M^2\,\mathrm{d}s^2 = 0$, vgl. Abschnitt 8.3. Im Sinne einer solchen Abbildung ist also der Rand (das Unendliche $r, \eta \to \pm\infty$) des Minkowski-Raumes ein Lichtkegel $\cos\chi + \cos cT = 0$, d. h. $\chi = \pm ct \pm \pi$, ähnlich wie der Rand der Ebene nach einer stereographischen Projektion auf die Kugelfläche ein Punkt ist. Man kann diese Zusammenhänge gut am Penrose-Diagramm studieren, das — bei Unterdrückung der Koordinaten $\vartheta$ und $\varphi$ — in Abb. 25.7 dargestellt ist.

Die Nullgeodäten des Minkowski-Raumes beginnen alle auf dem Vergangenheitslichtkegel $\mathcal{I}^-$ ($\equiv$ scri minus, scri = script $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ = Infinity) und enden auf dem

Zukunftslichtkegel $\mathcal{J}^+$ (scri plus); zeitartige Geodäten gehen von $I^-$ nach $I^+$; raumartige Geodäten enden in $I^0$ (da $\chi$ eine zyklische Variable ist, ist $I^0$ *ein* Punkt). Das Unendlichferne hat also eine Stuktur, man muß immer genau sagen, wie man ins Unendliche geht.

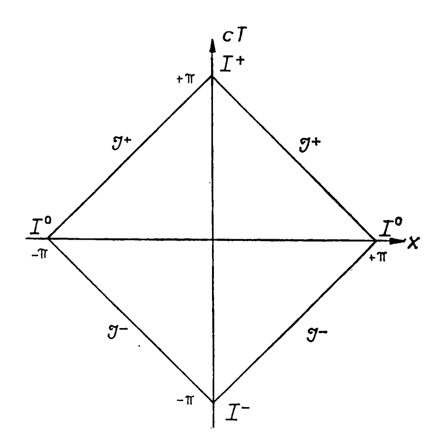



Abb. 25.7
Penrose-Diagramm des Ausschnittes $ds^2 = dr^2 - c^2\, d\eta^2$ des Minkowski-Raumes $ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\, d\eta^2$ (statt $x$ lies $\chi$)

Auch bei anderen Raum-Zeiten versucht man, das Unendlichferne unter Benutzung von Nullgeodäten bzw. raum- und zeitartigen Geodäten zu diskutieren und entsprechend als Rand $\mathcal{J}^\pm$, $I^\pm$ und $I^0$ einzuführen. Dabei wird $\mathcal{J}^\pm$ nicht immer ein Lichtkegel sein, wie z. B. in Abb. 25.5 (die Begrenzungen „Weltanfang" und „Weltende" in Abb. 25.5 und 25.6 entsprechen $\mathcal{J}^-$ und $\mathcal{J}^+$). Das Penrose-Diagramm der Schwarzschild-Lösung ist in Abb. 25.8 dargestellt; vgl. dazu Abschnitt 22.3, insbesondere die Abbildungen 22.1 und 22.2

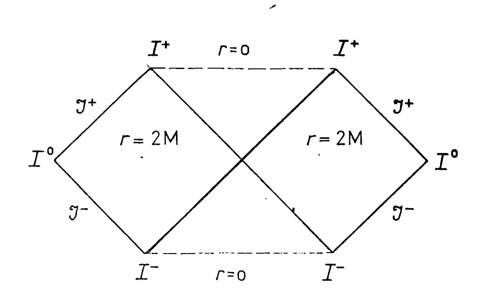



Abb. 25.8
Penrose-Diagramm der Schwarzschild-Lösung

Kehren wir zurück zu den Robertson-Walker-Metriken. Wichtiger als die konformflache Form (25,35) des Linienelementes ist die Aussage, die man aus dem nur auf die neue Zeitkoordinate $T$ transformierten Linienelement

$$ds^2 = K^2(ct)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - c^2\, dT^2] \qquad (25,36)$$

abliest: Alle geschlossenen Robertson-Walker-Metriken sind dem räumlich geschlossenen, statischen Einstein-Kosmos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2_{\text{Einstein}} &= \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}T^2, \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, &\quad 0 \leqq \chi \leqq \pi, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, &\quad -\infty < T < +\infty \end{aligned} \tag{25,37}$$

konform äquivalent. Dieser (spezielle) Einstein-Kosmos ist das einfachste geschlossene Weltmodell; er ist jedoch, wie wir später sehen werden, kein realistisches Modell unserer Welt. Bei Unterdrückung von 2 Dimensionen (die den Koordinaten $\vartheta$ und $\varphi$ entsprechen) kann man sich einige Eigenschaften dieses Kosmos am Modell eines Zylindermantels klarmachen (Abb. 25.9).

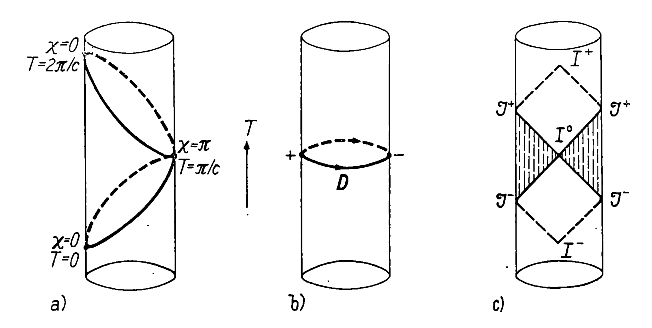



Abb. 25.9
Einstein-Kosmos mit (a) Lichtkegel, (b) Feldlinie einer Punktladung und (c) konformem Bild des Minkowski-Raumes

Lichtstrahlen, die von einem Punkt (z. B. $\chi = 0$) ausgehen, treffen sich im Antipodenpunkt ($\chi = \pi$) und kommen schließlich alle, zu entsprechend späterer Zeit, zum Ausgangspunkt zurück. Da Lichtstrahlen (Nullgeodäten) des Einstein-Kosmos mit denen der geschlossenen R-W-Modelle übereinstimmen (die Aussage $\mathrm{d}s^2 = 0$ ist konforminvariant), würden auch in allgemeineren geschlossenen Kosmen Lichtstrahlen zur Quelle zurückkehren, wenn die zur Verfügung stehende Eigenzeit $t$ ausreichen würde, das Intervall $\Delta T = 2\pi/c$ zu überdecken. Man vergleiche hierzu (25,33) mit den Kriterien (25,28) und (25,29) für das Auftreten von Horizonten.

Die quellenfreien Maxwell-Gleichungen sind konforminvariant [vgl. (8,41)]; kennen wir also ihre allgemeine Lösung im Einstein-Kosmos, haben wir damit auch die allgemeine Lösung in jedem geschlossenen R-W-Kosmos in der Hand. Da im Einstein-Kosmos alle räumlichen Koordinaten periodisch sind, haben die quellenfreien Maxwell-Gleichungen den Charakter von Eigenwertgleichungen für die Frequenz. Unter den Lösungen findet man eine verallgemeinerte ebene Welle (Eigenfunktion zur Frequenz $c/\lambda$), die in der Umgebung eines Punktes praktisch eine ebene Welle ist, deren Amplitude aber nur über einen Bereich

$$d \approx \sqrt{\lambda K} \tag{25,38}$$

merklich von Null verschieden ist: Der Einfluß der Raumkrümmung „lokalisiert" die ebene Welle und macht sie einer Teilchenbahn ähnlich. Für sichtbares Licht ergibt sich bei einem Weltradius von $2 \cdot 10^{10}$ Lichtjahren der Wert $d \approx 10^7$ km.

Zeichnet man in einem Einstein-Kosmos die von einer ruhenden Punktladung ausgehenden Feldlinien des $\boldsymbol{D}$-Feldes, so schneiden sie sich alle im Antipodenpunkt, treffen dort aber mit entgegengesetztem Vorzeichen ein: Zu jeder Ladung gibt es in einem geschlossenen Kosmos eine Ladung entgegengesetzten Vorzeichens (die aber nicht unbedingt im Antipodenpunkt sitzen muß). Diese anschaulich gewonnene Aussage kann man auch aus den Maxwell-Gleichungen ableiten. Für die Ladungsdichte $j^4/c$ gilt ja

$$\frac{1}{c}\, j^4 = F^{4n}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-\overset{4}{g}}} \left[\sqrt{-\overset{4}{g}}\, F^{4n}\right]_{,n} = \frac{1}{\sqrt{\overset{3}{g}}} \left[\sqrt{\overset{3}{g}}\, F^{4\alpha}\right]_{,\alpha} \tag{25,39}$$

oder, in dreidimensionaler Schreibweise mit $F^{4\alpha} = D^\alpha$,

$$D^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{1}{c}\, j^4. \tag{25,40}$$

Da der geschlossene dreidimensionale Ortsraum keine Oberfläche besitzt (eine Kugelfläche keinen Rand hat), liefert die Anwendung des Gaußschen Satzes

$$\int j^4\, \mathrm{d}^3 V = 0, \tag{25,41}$$

d. h., die Maxwell-Gleichungen sind nur dann integrabel, wenn die Gesamtladung verschwindet. Unsere Welt ist im Mittel ungeladen, ein geschlossenes Weltmodell stünde also in dieser Hinsicht nicht im Widerspruch zur Erfahrung.

Offensichtlich ist die aus (25,40) gezogene Folgerung nur an die mathematische Struktur dieser Gleichung, jedoch nicht an ihre physikalische Deutung gebunden: Das Volumenintegral einer jeden Größe, die sich als dreidimensionale Divergenz schreiben läßt, muß verschwinden. Da es nur positive Massendichten $\mu$ gibt, ist also z. B. eine Newtonsche Gravitationstheorie

$$\Delta U = U^{,\alpha}{}_{;\alpha} = -\mu \tag{25,42}$$

in einem geschlossenen Kosmos (25,36), (25,37) nicht möglich.

Gibt es in einem geschlossenen Kosmos einen zur Vierergeschwindigkeit $u^n$ proportionalen Killing-Vektor $\xi^n$,

$$\xi_{n;i} + \xi_{i;n} = 0, \qquad \xi^n = \alpha u^n, \tag{25,43}$$

dann gilt wegen der Definition des Krümmungstensors, der Einsteinschen Feldgleichungen und der allgemeinen Zerlegung (8,74) des Energieimpulstensors einer Flüssigkeit

$$\begin{aligned}(\xi^{i;n} - \xi^{n;i})_{;n} = -2\xi^{n;i}{}_{;n} = -2\xi^m R_m{}^{ni}{}_n = -2\varkappa(\xi^m T_m{}^i - \tfrac{1}{2}\, \xi^i T^n{}_n)\\ = \alpha\varkappa(3p + \mu c^2)\, u^i + \alpha\varkappa c^2 q^i.\end{aligned} \tag{25,44}$$

Wegen der formalen Ähnlichkeit zu den Maxwell-Gleichungen kann man schließen, daß für jeden geschlossenen Kosmos das Integral über die zeitliche Komponente ($i = 4$) der rechten Seite von (25,44) — über das Analogon der Ladungsdichte — verschwinden muß. Offensichtlich ist dies aber für ideale Flüssigkeiten ($q^i = 0$, $p > 0$, $\mu > 0$) nicht möglich: Es gibt keine statischen oder stationären räumlich geschlossenen Weltmodelle mit idealem fluidem Medium, deren Killing-Vektor parallel zur Vierergeschwindigkeit ist. In thermodynamischer Sprechweise kann man dies auch so

formulieren (vgl. hierzu Abschnitt 8.5.): Ein Weltmodell mit geschlossenem Ortsraum und idealer Flüssigkeit ($q^i = 0$) kann sich nicht im ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht befinden (der Temperaturvektor $u^a/T$ kann kein Killing-Vektor sein).

Bei diesen letzten Überlegungen haben wir schon Gebrauch von den Einsteinschen Feldgleichungen gemacht. Wir werden uns jetzt der Aufgabe zuwenden, das zeitliche Verhalten der R-W-Metriken aus diesen Feldgleichungen zu bestimmen.

*Literatur zu Kapitel 25.:*

[20], [46], [60], [62], [129], [171], [182], [188], [194], [201].

# 26. Die Dynamik der Robertson-Walker-Metriken und die Friedmannschen Weltmodelle

## 26.1. Die Einsteinschen Feldgleichungen für Robertson-Walker-Metriken

Die Robertson-Walker-Metriken sind durch das zeitliche Verhalten des Weltradius und das Vorzeichen der Krümmung, d. h. durch $K(ct)$ und $\varepsilon$, vollständig bestimmt. Wir stehen also vor der Aufgabe, diese Parameter aus den Eigenschaften der Materie in unserer Welt zu berechnen und zu sehen, ob Beobachtungsergebnisse und Weltmodell in Übereinstimmung zu bringen sind.

Krümmungstensor und Ricci-Tensor einer R-W-Metrik lassen sich relativ einfach berechnen, wenn wir auf das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\,\mathrm{d}\sigma^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta - c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{26,1}$$

die Reduktionsformeln (16,20) anwenden, also von

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{\dot{K}^2}{K^2}\,(g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} - g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}),\\
R^4{}_{\beta\mu\nu} &= 0,\\
R^4{}_{\beta4\nu} &= \frac{\ddot{K}}{K}\,g_{\beta\nu},\\
K_{\alpha\beta} &= -\frac{\dot{K}}{K}\,g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{26,2}$$

ausgehen, und für den dreidimensionalen Krümmungstensor der R-W-Metriken, deren Ortsraum ja ein Raum konstanter Krümmung ist, entsprechend (21,26) die Beziehung

$$\overset{3}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon K^{-2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}) \tag{26,3}$$

einsetzen. Wir erhalten als nichtverschwindende Komponenten des Ricci-Tensors

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu} &= [\ddot{K}/K + 2(\dot{K}^2 + \varepsilon)\,K^{-2}]\,g_{\beta\nu}\\
R_{44} &= -3\ddot{K}/K.
\end{aligned} \tag{26,4}$$

Zusammen mit den Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{mn} - \tfrac{1}{2} R g_{mn} = \varkappa T_{mn} \tag{26,5}$$

zeigen uns die Gln. (26,4), daß der Energieimpulstensor der Materie der Welt in den Koordinaten (26,1) räumlich isotrop ist und ein Energiestrom nicht auftritt ($T_{4\alpha} = 0$): In R-W-Metriken *muß* der Energieimpulstensor der einer idealen Flüssigkeit sein,

$$T_{mn} = p g_{mn} + (\mu + p/c^2)\, u_n u_m, \tag{26,6}$$

wobei das ausgezeichnete Koordinatensystem (26,1) das Ruhesystem der Materie ist und $\mu$ und $p$ nur von der Zeit abhängen.

Die Feldgleichungen (26,5) reduzieren sich infolge (26,4) und (26,6) auf

$$2\ddot{K}/K + (\dot{K}^2 + \varepsilon)/K^2 = -\varkappa p \tag{26,7}$$

und

$$3(\dot{K}^2 + \varepsilon)/K^2 = \varkappa \mu c^2. \tag{26,8}$$

Diese beiden Gleichungen sind nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\dot{\mu}/(\mu + p/c^2) = -3\dot{K}/K \tag{26,9}$$

gilt. Da für $\dot{K} \neq 0$, $\mu c^2 + p \neq 0$ aus (26,9) und (26,8) auch (26,7) folgt, kann man die Feldgleichung (26,7) durch (26,9) ersetzen.

Die Gl. (26,8) nennt man die Friedmannsche Gleichung (Friedmann 1922), die ihr genügenden speziellen R-W-Metriken heißen Friedmann-Kosmen. Gelegentlich bezeichnet man als Friedmann-Kosmos auch nur das für den Spezialfall $p = 0$ entstehende Weltmodell. Kennt man die Zustandsgleichung $f(\mu, p) = 0$, kann man aus (26,9) den Weltradius $K$ als Funktion der Massendichte $\mu$ bestimmen und dann aus (26,8) das zeitliche Verhalten von $K$ bzw. $\mu$ berechnen.

Die Friedmannschen Weltmodelle lassen sich in invarianter Form auch dadurch kennzeichnen, daß es genau die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit idealer Flüssigkeit sind, deren Geschwindigkeitsfeld $u^n(x^i)$ rotations-, scherungs- und beschleunigungsfrei ist.

## 26.2. Die wichtigsten Friedmann-artigen Weltmodelle

*Der Einstein-Kosmos.* Bald nach der Aufstellung seiner Feldgleichungen versuchte Einstein (1917) ihre Anwendung auf die Kosmologie. Dem damaligen Stand des Wissens entsprechend, ging er von einem statischen Weltmodell aus. Für diesen Einstein-Kosmos verschwinden also in (26,7) und (26,8) alle Zeitableitungen, es entstehen die Gleichungen

$$\varepsilon/K^2 = -\varkappa p, \qquad 3\varepsilon/K^2 = \varkappa \mu c^2. \tag{26,10}$$

Diese lassen sich mit den Beobachtungsdaten, die $p \approx 0$ fordern, nur auf etwas künstliche Weise in Übereinstimmung bringen, nämlich durch Einführung der kosmologischen Konstanten $\Lambda$: Der Energieimpulstensor enthält nach dieser Hypothese außer dem Anteil der gravitierenden Materie (hier: der inkohärenten Materie) zusätzlich einen zum metrischen Tensor proportionalen Anteil:

$$\varkappa T_{mn} = -\Lambda g_{mn} + \varkappa \bar{\mu} u_m u_n, \qquad \bar{\mu} > 0, \qquad \Lambda = \text{const.} \tag{26,11}$$

Vergleich von (26,11) mit (26,10) gibt uns bei Verwendung von

$$\varkappa p = -\Lambda, \qquad \varkappa\mu c^2 = \varkappa\bar{\mu}c^2 + \Lambda \tag{26,12}$$

die Beziehungen

$$\varepsilon = +1, \quad \Lambda = 1/K^2, \qquad \varkappa\bar{\mu}c^2 = 2/K^2, \tag{26,13}$$

es handelt sich beim Einstein-Kosmos um einen geschlossenen Kosmos konstanter Krümmung:

$$\mathrm{d}s^2 = K^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)] - c^2\,\mathrm{d}t^2, \qquad K = \text{const.} \tag{26,14}$$

*Die De-Sitter-Kosmen.* Die Einführung der kosmologischen Konstante bedeutet, daß der Raum auch bei vollständiger Abwesenheit von Materie gekrümmt ist. Geht man nämlich mit

$$\varkappa T_{mn} = -\Lambda g_{mn}, \qquad \Lambda = \text{const} \tag{26,15}$$

in die Feldgleichungen (26,7) und (26,8) ein, so erhält man

$$K\ddot{K} - \dot{K}^2 = \varepsilon, \tag{26,16}$$

$$\Lambda = 3\,\frac{\dot{K}^2 + \varepsilon}{K^2}. \tag{26,17}$$

Ausgangspunkt für die Integration dieses Systems ist am besten die einmal differenzierte Gl. (26,17), also

$$\ddot{K} - \frac{\Lambda}{3}K = 0. \tag{26,18}$$

Man erhält für positives $\Lambda$ die eigentlichen De-Sitter-Metriken (DE-SITTER 1917),

$$\begin{aligned} \varepsilon = +1: &\quad K = \frac{1}{B}\cosh Bct, \\ \varepsilon = -1: &\quad K = \frac{1}{B}\sinh Bct, \qquad \Lambda = 3B^2, \\ \varepsilon = 0: &\quad K = A\,\mathrm{e}^{Bct}, \end{aligned} \tag{26,19}$$

für negatives $\Lambda$

$$\varepsilon = -1: \quad K = \frac{1}{B}\cos cBt, \qquad \Lambda = -3B^2 \tag{26,20}$$

und für $\Lambda = 0$ den flachen Raum $\varepsilon = 0$, $K = \text{const.}$

Die De-Sitter-Kosmen haben eine höhere Symmetrie, als dies ihre Beschreibung durch Robertson-Walker-Metriken vermuten läßt. Berechnet man nämlich aus (26,2), (26,3), (26,16) und (26 17) den vollständigen vierdimensionalen Krümmungstensor dieser Räume, erhält man

$$R_{abmn} = \frac{\Lambda}{3}\,(g_{am}g_{bn} - g_{an}g_{bm})\,. \tag{26,21}$$

Es handelt sich also um vierdimensionale Räume konstanter Krümmung (positiver Krümmung für $\Lambda > 0$), in denen keine Raum-, aber auch keine Zeitrichtung ausgezeichnet ist. Insbesondere sind die drei Metriken (26,19) nur drei verschiedene Ausschnitte des gleichen vierdimensionalen Raumes konstanter positiver Krümmung. Nach unseren heutigen Kenntnissen geben die De-Sitter-Kosmen kein realistisches Modell unserer Welt, mit Ausnahme einer eventuellen „inflationären" Phase in der Frühzeit (vgl. Abschnitt 27.2.).

*Der Strahlungskosmos.* Inkohärente isotrope elektromagnetische Strahlung kann formal durch den Energieimpulstensor (26,6) einer idealen Flüssigkeit mit

$$p = \tfrac{1}{3}\,\mu c^2 \qquad (26,22)$$

beschrieben werden. Mit Hilfe dieser Zustandsgleichung können wir (26,9) sofort integrieren und erhalten

$$\mu c^2 K^4 = \text{const} = A\,, \qquad (26,23)$$

bei der Expansion oder Kontraktion der Welt ist die Massendichte (Energiedichte) der Strahlung umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Weltradius.
Das zeitliche Verhalten dieses Kosmos wird durch

$$\dot{K}^2 = \frac{\varkappa A}{3K^2} - \varepsilon \qquad (26,24)$$

bestimmt; nach Einführung von $y = K^2$ wird aus (26,24) die Differentialgleichung

$$\frac{\dot{y}^2}{4} = \frac{\varkappa A}{3} - \varepsilon y\,, \qquad (26,25)$$

die sich einfach integrieren läßt. Wählen wir die Integrationskonstante so, daß $y(t_0) = 0$ gilt, dann erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0: &\qquad K^2 = 2c\sqrt{\frac{\varkappa A}{3}}\,(t - t_0), \\ \varepsilon = -1: &\qquad K^2 = c^2(t - t_0)^2 + 2c\sqrt{\frac{\varkappa A}{3}}\,(t - t_0), \\ \varepsilon = +1: &\qquad K^2 = -c^2(t - t_0)^2 + 2c\sqrt{\frac{\varkappa A}{3}}\,(t - t_0). \end{aligned} \qquad (26,26)$$

Obwohl wir zur Zeit sicher nicht in einem Strahlungskosmos leben, sind einige Eigenschaften dieser Lösungen bemerkenswert. Zum einen gehört dazu das Auftreten einer Singularität der Metrik bei $t = t_0$. Dort geht $K$ gegen Null, die Abstände zweier beliebiger Punkte der Welt werden beliebig klein, und in der Nähe dieser Singularität ist der Weltradius $K$ unabhängig von $\varepsilon$, d. h. für offene und geschlossene Welten gleich. Zum anderen ist die Aussage interessant, daß elektromagnetische Strahlung (Licht) allein auf Grund der eigenen Gravitationswechselwirkung einen geschlossenen Kosmos erzeugen kann, dessen Radius $K$ von Null bis zum Maximum $\varkappa A/3$ anwächst und nach der Zeit $\Delta t = 2\sqrt{\varkappa A/3c^2}$ wieder auf Null zurückgeht.

*Der Friedmann-Kosmos.* Als Friedmann-Kosmen im engeren Sinne bezeichnet man Weltmodelle mit inkohärenter Materie:

$$T_{mn} = \mu u_m u_n . \tag{26,27}$$

Für diesen Spezialfall kann man (26,9) sofort durch

$$\mu c^2 K^3 = \hat{\mathrm{M}} = \mathrm{const} \tag{26,28}$$

integrieren; offenbar ist die Integrationskonstante $\hat{\mathrm{M}}$ für geschlossene Kosmen zur Gesamtmasse proportional. Man beachte die gegenüber dem Lichtkosmos (26,23) geänderte $K$-Potenz!

Die noch verbleibende Feldgleichung (26,8) vereinfacht sich zur „Friedmannschen Differentialgleichung"

$$\dot{K}^2 = \frac{\varkappa \hat{\mathrm{M}}}{3K} - \varepsilon . \tag{26,29}$$

Die Einführung der neuen Variablen

$$cT = \pm \int \frac{\mathrm{d}ct}{K(ct)} \tag{26,30}$$

bringt sie auf die Form

$$K'^2 = \varkappa \hat{\mathrm{M}} K/3 - \varepsilon K^2 , \tag{26,31}$$

in der sie sich leicht durch Trennung der Variablen lösen läßt. Bezeichnen wir mit $t_0$ wieder den Zeitpunkt, für den $K$ verschwindet, dann sind

$$\varepsilon = 0: \quad K = \varkappa \hat{\mathrm{M}} c^2 T^2/12, \qquad c(t - t_0) = \pm \varkappa \hat{\mathrm{M}} (cT)^3/36, \tag{26,32}$$

$$\varepsilon = -1: \quad K = \frac{\varkappa \hat{\mathrm{M}}}{6} (\cosh cT - 1), \qquad c(t - t_0) = \pm \frac{\varkappa \hat{\mathrm{M}}}{6} (\sinh cT - cT), \tag{26,33}$$

$$\varepsilon = +1: \quad K = \frac{\varkappa \hat{\mathrm{M}}}{6} (1 - \cos cT), \qquad c(t - t_0) = \pm \frac{\varkappa \hat{\mathrm{M}}}{6} (cT - \sin cT) \tag{26,34}$$

die Lösungen von (26,29) in Parameterdarstellung (vgl. Abb. 26,1). Alle drei Typen haben am „Weltanfang" $t = t_0$ eine Singularität, dort geht der Weltradius $K$ gegen

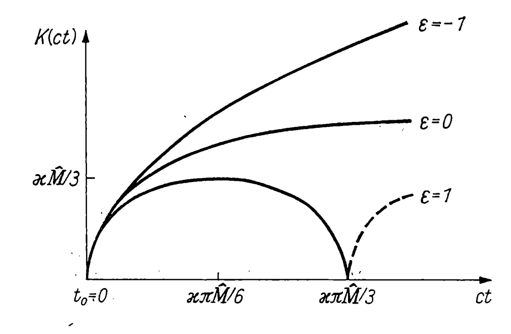



Abb. 26.1
Der Weltradius $K$ als Funktion der Zeit für die drei Friedmann-Modelle

Null. In der Nähe dieser Singularität haben die drei Typen das gleiche zeitliche Verhalten von $K$, nämlich

$$K(ct) \approx (2\varkappa \hat{M}/4)^{1/3}\, t^{2/3}. \tag{26,35}$$

Für das geschlossene Modell ($\varepsilon = +1$) erreicht $K(ct)$ ein Maximum und geht dann wieder auf Null zurück; dabei beschreibt es einen Zykloidenbogen. In den beiden offenen Modellen nimmt $K(ct)$ von Null an ständig zu (wenn wir als positive Zeitrichtung die des wachsenden $T$ nehmen).

## 26.3. Folgerungen aus den Feldgleichungen für Modelle beliebiger Zustandsgleichung mit positivem Druck und positiver Ruhemassendichte

Die Zustandsgleichung üblicher Materie liegt zwischen inkohärenter Materie ($p = 0$, $\mu > 0$) und inkohärenter Strahlung ($\mu c^2 = 3p$) in dem Sinne, daß $\mu c^2 - 3p \geqq 0$ gilt (im mikroskopischen Bild wird der Druck ja durch Stöße von Teilchen hervorgerufen, die höchstens Lichtgeschwindigkeit haben). Unabhängig von der speziellen Art der Zustandsgleichung (Temperaturabhängigkeit!) folgen jedoch schon allein aus den Feldgleichungen und der Annahme $\mu > 0$, $p > 0$ bemerkenswerte Eigenschaften der Friedmann-Modelle.

So erhält man aus (26,7) und (26,8) die Beziehung

$$6\ddot{K} = -\varkappa(\mu c^2 + 3p)\, K, \tag{26,36}$$

die man folgendermaßen interpretieren kann. Ist $\dot{K}$ zu einem Zeitpunkt $t$ positiv, dann ist wegen (26,36) $K(ct)$ eine nach unten gekrümmte Kurve (wie die Kurven der Abb. 26.1), die vor endlicher Zeit eine Nullstelle gehabt haben muß; ist $\dot{K}$ negativ, liegt diese Nullstelle von $K$ in der Zukunft. Da wir, wie wir noch ausführlich darstellen werden, in der Gegenwart ein positives $\dot{K}$ beobachten, haben Weltmodelle mit Robertson-Walker-Metrik unausweichlich einen „Weltanfang" $t = 0$, in dem die Metrik singulär ($K$ Null) wird, unabhängig von der Zustandsgleichung und der Wahl von $\varepsilon$. Durch Vergleich der gekrümmten Kurve $K(ct)$ mit ihrer Tangente im Zeitpunkt $t$ kann das Weltalter $t$ entsprechend

$$ct < K(ct)/\dot{K}(ct) = 1/H(ct) \tag{26,37}$$

durch die Hubble-Zahl $H$ abgeschätzt werden.

Schreibt man (26,9) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial K}\,(\mu c^2 K^3) = -3pK^2, \tag{26,38}$$

dann sieht man, daß $\mu c^2 K^3$ in die Vergangenheit hinein anwächst, eventuell sogar unendlich wird: für $K \to 0$ wächst $\mu$ mindestens wie $K^{-3}$. Man kann daher in Gl. (26,8) den zu $\varepsilon$ proportionalen Term vernachlässigen und in der Nähe des Weltanfangs mit

$$3\dot{K}^2 = \varkappa \mu c^2 K^2 \tag{26,39}$$

rechnen: Das Expansionsverhalten des Kosmos in der Frühzeit hängt nicht von $\varepsilon$ ab, es ist für offene und geschlossene Modelle gleich.

Das zukünftige Verhalten des Kosmos wird dagegen von $\varepsilon$ wesentlich mitbestimmt. Da wegen (26,38) bei wachsendem $K$ die Ruhemassendichte $\mu$ mindestens wie $K^{-3}$

abnimmt, geht der Term $\varkappa\mu c^2 K^2$ mindestens mit $K^{-1}$. Für $\varepsilon = 1$ wird also in endlicher Zeit ein Maximum $\dot{K} = 0$ erreicht, und da $K = \text{const}$ keine Lösung von (26,36) ist, wird der Weltradius wieder abnehmen und dann notwendigerweise wieder $K = 0$ erreichen: Eine geschlossene Welt mit $\varepsilon = 1$ durchläuft einen Zyklus (oder auch mehrere Zyklen). Für $\varepsilon = -1$ kann $\dot{K}^2$ niemals Null werden, der Kosmos expandiert ständig weiter, wobei $\dot{K}$ dem Wert 1 zustrebt ($K(ct) \approx ct$ für $t \to \infty$). Auch die Kosmen mit $\varepsilon = 0$ expandieren ständig, wobei aber $\dot{K}$ und $\ddot{K}$ gegen Null gehen.

In allen diesen Kosmen gibt es *Teilchenhorizonte*, ein Beobachter kann zur Zeit $t$ nicht immer die ganze Welt sehen. Da wegen (25,28) die Existenz solcher Horizonte offenbar entscheidend von dem Verhalten von $K(ct)$ am Weltanfang $t_A = 0$ abhängt, machen wir den Ansatz $K \sim (ct)^\alpha$, $\alpha > 0$ und gehen damit in (26,36) ein. Allein aus dem Vorzeichen der beiden Seiten der dann entstehenden Gleichung folgt $\alpha < 1$; für kleine Zeiten gilt

$$\chi_P \sim (ct)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{26,40}$$

$\chi_P$ ist in der Nähe von $t = 0$ endlich und kleiner als $\pi$, und auch für beliebig endliche Zeiten ist $\chi_P$ endlich: In offenen Modellen ist niemals die ganze Welt sichtbar. In geschlossenen Modellen kann jedoch nach genügend langer Zeit $\chi_P$ den Wert $\pi$ oder sogar $2\pi$ annehmen; so gilt z. B. für den Friedmann-Kosmos (26,34) $\chi_P = cT = \pi$ für den Zeitpunkt der maximalen Ausdehnung (der ganze Raum ist sichtbar) und $\chi_P = 2\pi$ am Weltende (der Beobachter sieht seine Weltlinie, d. h. sich selbst, am Weltanfang).

Das Auftreten von *Ereignishorizonten* hängt vom Verhalten von $K(ct)$ am Weltende ab. Da für offene Modelle ($\varepsilon = 0, -1$) der Weltradius $K$ für große $t$ höchstens wie $t^{-1}$ wächst, divergiert das Integral (25,4) für $t_E \to +\infty$: Es gibt keinen Ereignishorizont, wenn man lange genug wartet, erfährt man von jedem Ereignis. In geschlossenen Modellen ($\varepsilon = +1$) gibt es jedoch Ereignishorizonte (der Beweis verläuft wie bei der obigen Überlegung zu den Teilchenhorizonten): Von Ereignissen, die nach dem Stadium maximaler Ausdehnung stattfinden, wird ein Beobachter vor Weltende nicht unbedingt etwas erfahren.

*Literatur zu Kapitel 26.:*

[20], [115], [127], [135].

# 27. Unsere Welt als Friedmann-Kosmos

## 27.1. Rotverschiebung und Massendichte

Es war eine der wichtigsten Bestätigungen der Ideen der Allgemeinen Relativitätstheorie und ihrer Anwendung auf die Kosmologie, als im Jahre 1929 — etwa 13 Jahre nach der Aufstellung ihrer Grundgleichungen und 7 Jahre nach der Veröffentlichung des Friedmannschen-Weltmodells — die kosmologische Rotverschiebung durch Hubble gefunden wurde. Dazwischen lag allerdings ein Umweg und Irrtum Einsteins, der glaubte, nur durch Einführung der kosmologischen Konstante ein der Realtivitätstheorie gehorchendes Weltmodell erreichen zu können, und dabei den Einstein-Kosmos fand, ein statisches Modell ohne Rotverschiebung.

Die Rotverschiebung bestätigt nicht nur die Kosmologie der Allgemeinen Relativitätstheorie und insbesondere die Vorstellung von der Expansion der Welt, ihre genaue Auswertung gibt uns auch Daten, um zu bestimmen, welchem der homogenen isotropen Weltmodelle unsere Welt am nächsten kommt. Aus der Rotverschiebung [als Funktion des Abstandes; vgl. (25,20)] lassen sich Hubble-Zahl $H$ und Beschleunigungsparameter $q$ im Prinzip bestimmen. Setzt man sie entsprechend ihrer Definition

$$H = \dot{K}/K, \qquad q = -\ddot{K}K/\dot{K}^2 \tag{27,1}$$

in die Feldgleichungen (26,7) und (26,8) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} 6qH^2 &= \varkappa(\mu c^2 + 3p), \\ 3H^2 &= \varkappa\mu c^2 - 3\varepsilon/K^2. \end{aligned} \tag{27,2}$$

Im allgemeinen reichen diese beiden Gleichungen natürlich nicht aus, um aus der Rotverschiebung, d. h. der Kenntnis von $q$ und $H^2$, die Unbekannten $\mu$, $p$, $\varepsilon$ und $K$ zu bestimmen. Im gegenwärtigen Zustand unserer Welt ist jedoch der überwiegende Teil von $\mu$ in den Massen der Galaxien enthalten und der Druck infolgedessen zu vernachlässigen; für diese inkohärente Materie gilt dann

$$6qH^2 = \varkappa\mu c^2 \tag{27,3}$$

und

$$H^2(2q - 1) = \varepsilon/K^2. \tag{27,4}$$

Da $\varepsilon$ nur die Werte 0, $\pm 1$ annehmen kann, kann man allein aus $q$ den Wert von $\varepsilon$ bestimmen: $q > 1/2$ gibt einen geschlossenen Kosmos, $q \leqq 1/2$ die beiden offenen Modelle. Ist $\varepsilon$ fixiert, kann man aus $H$ und $q$ den derzeitigen Weltradius $K$ und die Massendichte $\mu$ bestimmen und mit den Beobachtungsdaten vergleichen. Diejenige Massendichte $\mu$, die genau dem kritischen Wert $q = 1/2$ (dem Übergang vom offenen zum geschlossenen Weltmodell) entspricht, nennt man die kritische Massendichte:

$$\mu_{\text{krit}} = 3H^2/\varkappa c^2. \tag{27,5}$$

Leider sind die gegenwärtigen Messungen und Auswertungen der Rotverschiebung-Entfernung-Beziehung (25,20) noch so unvollständig und ungenau (im wesentlichen wegen der großen systematischen Fehler bei der Entfernungsbestimmung), daß sich die Beziehungen (27,3) und (27,4) noch nicht auswerten bzw. überprüfen lassen. Folgende aus der Rotverschiebung ($H$ und $q$) und der Auszählung und Abschätzung der Galaxien ($\mu$) gefundenen Zahlenwerte sind zur Zeit am wahrscheinlichsten:

$$H = 6 \cdot 10^{-29}\,\text{cm}^{-1}, \qquad cH = 55\,\text{km/s Mpc},$$

$$1/cH = 18 \cdot 10^9 a, \tag{27,6}$$

$$q = 1 \pm 1, \tag{27,7}$$

$$\mu = 3 \cdot 10^{-31}\,\text{g cm}^{-3}. \tag{27,8}$$

Vergleicht man die Zahlenwerte dieser drei Größen mit den Beziehungen (27,3) und (27,4), dann stellt man fest:

1. Die gegenwärtig beobachtete Massendichte liegt unterhalb der kritischen Dichte

$$\mu_{\text{krit}} = 6 \cdot 10^{-30}\,\text{g cm}^{-3}; \tag{27,9}$$

wir müßten in einer offenen Welt leben.

2. Unsere Welt hat einen Radius von etwa $K \approx H^{-1} = 18 \cdot 10^9$ Lichtjahre, ist ungefähr $11 \cdot 10^9$ Jahre alt und befindet sich in einer Expansionsphase.

3. Da $q$ aus der Rotverschiebung noch nicht genau genug bestimmt werden kann und auch $\mu$ noch nicht sicher genug bekannt ist, weiß man noch nicht, ob unsere Welt offen oder geschlossen ist.

In Anbetracht der überraschend schnellen Veränderung „gesicherter" Zahlenwerte von $H$, $q$ und $\mu$ in den letzten Jahrzehnten kann man mit gutem Gewissen nur folgendes feststellen:

1. Das Weltalter, das aus der Hubble-Zahl und aus dem Alter der Gesteine oder der Sternsysteme folgt, hat übereinstimmend die Größenordnung von $10 \cdot 10^9$ Jahren (Faktor 2 bis 3 als Unsicherheit).

2. Die mittlere Massendichte im Kosmos liegt bei $\mu = 10^{-30}$ g cm$^{-3}$ (Faktor 10 als Unsicherheit).

3. An der kosmologischen Natur der Rotverschiebung und damit der Anwendbarkeit der Relativitätstheorie auf die Kosmologie besteht kein Zweifel.

Wie wir oben gezeigt haben, spielte in der Frühzeit des Kosmos der Parameter $\varepsilon$ keine wesentliche Rolle. Unsere Unkenntnis des genauen Wertes des Beschleunigungsparameters $q$, d. h. des Wertes von $\varepsilon$, beeinträchtigt also nicht den Wert von Modellen für die frühesten Entwicklungsstadien unserer Welt. Wir wollen deshalb im folgenden diese Modellvorstellung skizzieren.

## 27.2. Die Frühzeit unserer Welt und die kosmische Hintergrundstrahlung

Bei der unmittelbaren optischen Beobachtung weit entfernter Objekte sehen wir zwar schon ein beträchtliches Stück in die Vergangenheit unserer Welt zurück; dem Weltanfang aber bzw. seiner zeitlichen Umgebung entspricht eine unendlich große bzw. sehr große Rotverschiebung, er ist praktisch unsichtbar. Wenn wir also durch Beobachtungen Aussagen über die Beschaffenheit der Welt in ihrer Frühphase gewinnen wollen, müssen wir uns an die physikalischen Objekte unserer näheren Umgebung halten und aus ihrem jetzigen Zustand und den Gesetzmäßigkeiten ihrer (lokalen) Entwicklung auf den Zustand der Welt bei ihrer Entstehung schließen.

Wie sah denn nun unsere Welt am Weltanfang aus? Um diese und ähnliche Fragen überhaupt sinnvoll beantworten zu können, müssen wir den etwas mysteriösen Begriff „Weltanfang" genauer definieren. „Weltanfang" bedeutet nicht, daß vorher keine Materie vorhanden war oder sie zu diesem Zeitpunkt geschaffen wurde; dieses Wort soll vielmehr zum Ausdruck bringen, daß aufgrund physikalischer Gesetze der Zustand der Welt wesentlich von dem jetzigen abwich. Analog sind die Begriffe „Weltalter" bzw. „Weltende" zu verstehen. Im Rahmen der Friedmannschen Weltmodelle ist der Weltanfang derjenige Zeitpunkt in der Vergangenheit, in dem der Krümmungsradius $K$ Null war, die Welt ein singuläres Verhalten zeigte. Diese Aussage bedarf aber einer Ergänzung in zweierlei Hinsicht.

Einmal sind sowohl unsere Kenntnisse physikalischer Gesetze als auch das vereinfachte Weltmodell eines homogenen isotropen Raumes nicht ausreichend, um fundierte Aussagen über die physikalischen Vorgänge in der Nähe des Weltanfangs, d. h. bei außerordentlich hohen Materiedichten, zu machen. Alle Beobachtungen und Rechnungen deuten jedoch darauf hin, daß vor etwa $10 \cdot 10^9$ Jahren die Welt wesent-

lich anders aussah als heute und sich wahrscheinlich in einem Zustand sehr hoher Dichte befand. Weltmodelle beginnen deshalb mit Zuständen, in denen Wechselwirkungen von Elementarteilchen die entscheidenden Vorgänge sind.

Zum anderen muß man berücksichtigen, daß die Zeit keine absolute Bedeutung hat, die Zeitmessung immer im Zusammenhang mit den Eigenschaften der Materie gesehen werden muß. Die Zeitkoordinate (Weltzeit) $t$ der Friedmann-Kosmen ist die Eigenzeit der Massenelemente der Welt. Die Uhren, die man zur Messung dieser Eigenzeit benutzt, sind in der abstrakten Theorie punktförmig; praktisch heißt das, sie sind so klein, daß sich innerhalb der Uhren und während einer Periode das kosmische Gravitationsfeld nicht ändert. Während in der Gegenwart also z. B. das Planetensystem eine brauchbare Uhr ist, sind es in der Frühzeit des Kosmos nur noch die Elementarteilchen und ihre Umwandlungsprozesse. Gemessen in der Zahl der ablaufenden, jeweils charakteristischen physikalischen Einzelprozesse ist der Weltanfang selbst in der Frühzeit (in der Nähe der Singularität) noch sehr weit (eventuell unendlich weit) entfernt, die vom Planetensystem abgeleitete Maßeinheit Jahr bringt das nicht richtig zum Ausdruck.

Kehren wir nun zurück zu dem Modell der Frühzeit eines Friedmann-Kosmos. Während in der Gegenwart der Hautanteil des Energieimpulstensors von der Sternmaterie gestellt wird und der Anteil der Strahlung vernachlässigbar klein ist, ist für die Frühzeit des Kosmos ein wesentlich anderes Verhalten zu erwarten. Zum einen steigt wegen (26,23) und (26,28) bei abnehmendem Weltradius $K$ die Energiedichte der Strahlung stärker an als die Energiedichte der inkohärenten Materie, so daß schließlich die Strahlung überwiegt. Zum anderen wachsen Temperatur und Energiedichte so stark an, daß im thermischen Gleichgewicht die unter irdischen Bedingungen instabilen massereichen Elementarteilchen einschließlich aller Antiteilchen und energiereiche Strahlungsquanten dominieren. Eine korrekte Beschreibung der Frühzeit ist also nur unter Berücksichtigung der Quantentheorie (Elementarteilchentheorie) möglich, und wir können sinnvollerweise nur soweit in die Vergangenheit extrapolieren, wie wir die physikalischen Gesetze im Hochenergiebereich *unter Berücksichtigung der Gravitation* kennen. Vieles ist hier noch Spekulation, aber die wesentlichen Züge des im folgenden dargestellten Bildes werden allgemein anerkannt.

Im Anfang befand sich das Universum in einem Zustand extrem hoher Dichte und Temperatur, den genauer erst die noch zu findende Vereinigung von Quantentheorie und Gravitation wird beschreiben können. Bei der folgenden Ausdehnung könnte es eine Phase gegeben haben, in der Quanteneffekte zu einem Energieimpulstensor führten, der proportional zum metrischen Tensor war (einem negativen Druck entsprechend!); in einer solchen Phase hätte die Welt das Verhalten eines De-Sitter-Kosmos mit einem exponentiellen Anwachsen des Weltradius $K$ (vgl. (26,19)), sie würde sich sehr schnell aufblähen (*inflationary universe*).

Mit der schnellen Ausdehnung der Welt verringerte sich die Temperatur, das Gleichgewicht verschob sich zugunsten der stabilen Teilchen, also der Elektronen, der Protonen, der Atomkerne der leichteren chemischen Elemente und der insbesondere bei der Paarvernichtung entstehenden Neutrinos und Photonen — alles Teilchen, deren physikalisches Verhalten wir genau genug kennen, um gesicherte Aussagen machen zu können. Bei der weiteren Expansion und Abkühlung entkoppelten nun die Photonen in dem Sinn, daß zum einen weder in erheblichem Umfang Photonen erzeugt wurden noch die Photonen genügend Energie für Paarerzeugung hatten oder Photonen ihre Energie an die restliche Materie abgeben konnten (die Welt wurde „durchsichtig") und zum anderen die Energiedichte der Photonen schneller

abnahm als die der übrigen Materie, so daß das zeitliche Verhalten der Expansion von den Photonen nicht mehr beeinflußt wurde.

Von diesem Zeitpunkt an galt also für den Energieimpulstensor des Photonengases allein der Erhaltungssatz

$$T^{ik}_{\mathrm{Ph};k} = 0, \tag{27,10}$$

aus dem für die Energiedichte $\mu_{\mathrm{Ph}}c^2$ wegen (26,9) wieder die Beziehung

$$\mu_{\mathrm{Ph}}c^2K^4 = A \tag{27,11}$$

folgt, wobei aber jetzt — im Unterschied zu (26,23) — das zeitliche Verhalten des Weltradius $K(ct)$ von außen (von dem Hauptteil, d. h. der in Atomkernen konzentrierten Materie) vorgeschrieben wird. Da nach dem Planckschen Strahlungsgesetz für das Photonengas außerdem

$$\mu_{\mathrm{Ph}}c^2 = \mathrm{const} \cdot T^4 \tag{27,12}$$

gilt, nahm und nimmt seine Temperatur entsprechend

$$T \sim 1/K \tag{27,13}$$

mit wachsendem Weltradius ab.

Die experimentelle Bestätigung dieser (schon von GAMOW 1948 durchgeführten) Überlegungen, nämlich die Entdeckung der inkohärenten kosmischen Hintergrundstrahlung durch PENZIAS und WILSON im Jahre 1965 (Nobelpreis 1978), war der größte Erfolg der Relativitätstheorie in der Kosmologie seit der Deutung der Hubbleschen Rotverschiebung. Die Beobachtungen zeigen, daß auf die Erde eine isotrope (inkohärente) elektromagnetische Strahlung fällt, deren Frequenzspektrum der Strahlung eines Schwarzen Körpers der Temperatur

$$T_0 \approx 2{,}7\ \mathrm{K} \tag{27,14}$$

entspricht, mit einem Intensitätsmaximum in der Nähe der Wellenlänge $\lambda_0 \approx 0{,}2$ cm (da die ersten Messungen auf eine etwas höhere Temperatur schließen ließen, nennt man diese Strahlung auch jetzt noch die 3-K-Strahlung). Die Energiedichte dieser Strahlung entspricht heute einer Massendichte von etwa

$$\mu_{\mathrm{Ph}} \approx 4{,}4\ 10^{-34}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}. \tag{27,15}$$

Nimmt man an, daß die Entkopplung Photonen—Restmaterie etwa bei 4000 K erfolgte, dann entspricht der inzwischen erfolgten Abkühlung wegen (27,14), (27,13) und (25,14) eine Rotverschiebung von

$$z = \frac{4000}{2{,}7} - 1 \approx 1480. \tag{27,16}$$

Die kosmische Hintergrundstrahlung gibt uns also einen unmittelbaren optischen Einblick in die Frühzeit des Kosmos, in viel frühere Zeiten, als sie den optischen Instrumenten durch Beobachtung weit entfernter Objekte ($z \lessgtr 4$) zugänglich sind. Die weitgehende Isotropie dieser Strahlung zeigt, daß schon zu diesem Zeitpunkt (wenn man annimmt, daß anfängliche Anisotropien ausgeglichen wurden) oder bis zu diesem Zeitpunkt (wenn man an die später durch die Galaxienbildung entstehenden

Inhomogenitäten denkt) der Kosmos Friedmann-artig war und daß sich die Erde höchstens mit geringer Geschwindigkeit gegenüber dem Ruhesystem der Gesamtmaterie bewegt.

Eine ähnliche Auswertung der nach den oben dargestellten Modellvorstellungen ebenfalls vorhandenen Neutrinostrahlung ist wegen der Schwierigkeiten des experimentellen Nachweises der Neutrinos noch nicht möglich.

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch eine kurze Bemerkung zur Entwicklung des Kosmos *nach* der Entstehung der elektromagnetischen Hintergrundstrahlung. Bei der allmählichen Abkühlung des „Urfeuerballs" entstehen schließlich die chemischen Elemente, bevorzugt Wasserstoff und Helium im Gewichtsverhältnis von etwa 73 : 27 und fast keine schwereren Elemente. Kleine Störungen der Homogenität des Kosmos führen dann zur Galaxienbildung; die dort in den Sternen erfolgende Verdichtung und Erhitzung der Materie führt zu Kernprozessen, bei denen die schwereren Elemente erzeugt werden. Alle diese Dinge sind jedoch noch Gegenstand der Forschung und im Detail nicht sicher bekannt.

## 27.3. Die Schwarzschild-Vakuole im Friedmann-Kosmos

Die Annahme einer ortsunabhängigen Massendichte im Kosmos führt zwar, wie wir gesehen haben, zu brauchbaren Weltmodellen mit Eigenschaften, die den beobachteten nahekommen, sie steht aber in krassem Widerspruch zu der Massenverteilung, die wir in unserer Umgebung feststellen. Die Masse ist hier stets in einzelnen Objekten (Planeten, Sternen, Galaxien) konzentriert, und der praktisch massefreie Zwischenraum übersteigt das Volumen dieser Objekte um einige Größenordnungen.

Diese Diskrepanz kann zumindest teilweise beseitigt werden, da die exakte Lösung für das Gravitationsfeld eines kugelsymmetrischen Sterns, der sich in einem speziellen Friedmann-Kosmos ($p = 0$) befindet und von einem materiefreien Raum umgeben ist, bekannt ist (Einstein/Straus 1945). Wir werden diese Lösung jetzt angeben und ihre Eigenschaften diskutieren.

Im Detail sieht unser physikalisches Modell folgendermaßen aus (Abb. 27.1): Ein kugelsymmetrischer Stern ist von materiefreiem Raum umgeben; das Gravitationsfeld im Innern des Sterns kann z. B. bei einem statischen Stern durch die innere Schwarzschild-Metrik oder bei einem kollabierenden oder explodierenden Stern durch den Ausschnitt eines Friedmann-Kosmos beschrieben werden. An diese innere

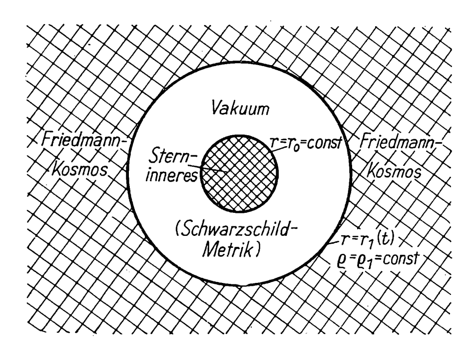



Abb. 27.1
Die Schwarzschild-Vakuole im Friedmann-Kosmos

Lösung läßt sich immer eine Schwarzschild-Lösung

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2M/r} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - (1 - 2M/r)\,c^2\,\mathrm{d}t^2, \quad r_0 \leqq r \leqq r_1 \tag{27,17}$$

und an diese Schwarzschild-Lösung wiederum die Metrik eines Friedmann-Kosmos anschließen. Wir haben dies in Abschnitt 23.3. ausführlich dargestellt und bewiesen, dort allerdings immer unter dem Gesichtspunkt eines Anschlusses „nach innen"; man kann aber leicht nachprüfen, daß alle Rechnungen genauso für den hier erwünschten Anschluß „nach außen" gelten. Dieser Anschluß läßt sich am einfachsten dadurch erreichen, daß man durch eine Koordinatentransformation

$$r = r(\varrho, c\tau), \qquad ct = ct(\varrho, c\tau) \tag{27,18}$$

in der Schwarzschild-Metrik ein Koordinatensystem

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\varrho^2}{1 - \varepsilon f^2(\varrho)} + r^2(\varrho, c\tau)\,(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}\tau^2, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial c\tau}\right)^2 = -\varepsilon f^2(\varrho) + 2M/r \tag{27,19}$$

einführt, in dem die Grenzfläche $\varrho = \varrho_1$ zu dem expandierenden oder kontrahierenden Kosmos

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(c\tau)\left[\frac{\mathrm{d}\varrho^2}{1 - \varepsilon\varrho^2} + \varrho^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] - c^2\,\mathrm{d}\tau^2 \tag{27,20}$$

ruht. Der Anschluß zwischen Schwarzschild-Metrik (27,17) oder (27,19) und dem Friedmann-Kosmos (27,20) ist genau dann möglich, wenn zwischen Massedichte $\mu(c\tau)$ und Krümmung $K(c\tau)$ des Kosmos einerseits und Gravitationsradius $2M$, Newtonscher Masse $m = 8M/\varkappa c^2$ und „Radius" $\varrho_1$ bzw. $r_1 = r_1(\varrho_1, c\tau)$ andererseits die Beziehungen

$$\varkappa\mu c^2 K^3 \varrho_1^3 = 6M = 3\varkappa m c^2/4\pi, \qquad r_1 = \varrho_1 K(c\tau) \tag{27,21}$$

gelten. Diese Beziehungen sichern, daß die Staubteilchen der Grenzfläche zwischen Vakuum und kosmischer Materie sich sowohl auf Geodäten der inneren Schwarzschild-Metrik als auch des äußeren Kosmos bewegen, d. h. das System sich in einem dynamischen Gleichgewicht befindet.

Man kann also in einem Friedmann-Kosmos einen oder mehrere kugelsymmetrische Hohlräume schaffen, die in diesen Räumen ursprünglich vorhandene staubförmige Materie zu Sternen komprimieren und wieder in die Mitte des Hohlraumes einsetzen. Dabei muß man aber beachten, daß die herausgenommene Gesamtmasse

$$m_\mathrm{L} = \int_0^{\varrho_1} \sqrt{g}\,\mu\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho = 4\pi K^3\mu \int_0^{\varrho_1} \frac{\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{1 - \varepsilon\varrho^2}} \tag{27,22}$$

für $\varepsilon \neq 0$ von der Sternmasse $m$ (für kleine Radien $\varrho_1$ nur geringfügig) abweicht.

Die interessanteste Eigenschaft der Vakuolenlösung ist sicher die, daß im Innern der Vakuole das Feld statisch ist. Die Expansion oder Kontraktion des Kosmos hat

keinen Einfluß auf die physikalischen Vorgänge im Innern der Vakuole, nur der Vakuolenradius $r_1$ ist zeitabhängig. Ein Beobachter im Innern merkt die kosmische Expansion nur an der Rotverschiebung der hinter der Grenzfläche liegenden Objekte, Sterne im Innern zeigen keine Rotverschiebung.

Wie ist denn nun die Vakuole beschaffen, in der wir leben? Entscheidend für die Größe der Vakuole ist der Zusammenhang

$$r_1 = \sqrt[3]{6M/\varkappa\mu c^2} \tag{27,23}$$

zwischen dem Koordinatenradius $r_1$ der Vakuole, dem Schwarzschild-Radius $2M$ des Zentralkörpers und der kosmischen Massendichte $\mu$. Messen wir $r_1$ und $2M$ in cm und setzen für $\mu$ den Wert $3 \cdot 10^{-31}$ g cm$^{-3}$ ein, dann gilt

$$r_1 \approx 1{,}75 \cdot 10^{19} \sqrt[3]{2M}. \tag{27,24}$$

Der Vakuolenradius der Erde ($2M = 0{,}88$) würde also weit über die Sonne hinaus reichen, und in der Vakuole der Sonne ($2M = 2{,}95 \cdot 10^5$) wären schon viele der nächsten Fixsterne enthalten. Ein realistisches Modell erhalten wir aber, wenn wir den Zentralkörper mit der lokalen Galaxiengruppe identifizieren ($2M \approx 5 \cdot 10^{17}$), der außer unserer Galaxis z. B. auch der Andromedanebel angehört: In der zugeordneten Vakuole ist dann keine weitere Galaxis vorhanden. Innerhalb dieses Systems ist die Expansion des Kosmos nicht wirksam, das Gravitationsfeld wird ausschließlich durch die in ihm selbst enthaltenen Massen bestimmt (soweit das Modell anwendbar, d. h. die Massenverteilung in guter Näherung kugelsymmetrisch ist). Der Radius der Erde oder der Erdbahn kann sich also nicht aufgrund der kosmischen Expansion verändern. Natürlich könnte sich aber auch der Zentralkörper, d. h. unsere Galaxis, in einem Zustand der allgemeinen Expansion befinden, der unabhängig von der kosmischen Expansion ist.

Von mehr theoretischem Interesse ist die Tatsache, daß die Zeitmessung im Kosmos und in der Vakuole nicht exakt übereinstimmen: Die Weltzeit $\tau$ des Friedmann-Kosmos ist infolge des Anschlußverfahrens identisch mit der Eigenzeit $\tau$ der Teilchen der Grenzschicht $r = r_1$, die sich auf radialen Geodäten bewegen. Diese Eigenzeit unterscheidet sich wegen (22,6) und (23,42) bis (23,46) um den Faktor

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c\sqrt{1 - \varepsilon\varrho_1^2}}{1 - 2M/\varrho_1 K(c\tau)} \tag{27,25}$$

von der Koordinatenzeit $t$ der Schwarzschild-Metrik. Im allgemeinen ist dieser Faktor vernachlässigbar klein.

Vakuolen können nicht beliebig groß sein. Trivialerweise darf in einem geschlossenen Kosmos ($\varepsilon = +1$) der Vakuolenradius $\varrho_1 = \sin\chi_1$ den Maximalwert $\pi$ der Koordinate $\chi$ nicht überschreiten. (Das von uns hier benutzte Koordinatensystem überdeckt mit $0 \leqq \varrho \leqq 1$ nur den halben Kosmos.) Eine zweite, wichtigere Bedingung folgt aus der Forderung, daß der Vakuolenradius $r_1$ außerhalb des Schwarzschild-Radius $r = 2M$ liegen muß. Wegen des Zusammenhangs (27,21) zwischen Vakuolenradius und Masse und der speziellen Form

$$K(c\tau) = \frac{\varkappa\mu c^2 K^3}{6}\, k(c\tau), \tag{27,26}$$

der Zeitabhängigkeit der Friedmannschen Weltmodelle [vgl. (26,28) und (26,32) bis (26,34)] ist die eben genannte Bedingung $r_1 > 2M$ nur für

$$\varrho_1^2 < \tfrac{1}{2}\, k(c\tau) \tag{27,27}$$

erfüllt. Der maximal erlaubte Vakuolenradius $K\varrho_1$ hängt vom Weltalter ab; in einem geschlossenen Friedmann-Kosmos ist die Vakuole stets kleiner als der halbe Kosmos ($\varrho_1 < 1$). Eine Galaxis (eine Galaxiengruppe) der Masse $M$ kann also in einem Kosmos erst dann entstehen, wenn das Weltalter $\tau$ größer ist als das durch

$$M^2 = k(c\tau)\, K^2(c\tau)/8 \tag{27,28}$$

geforderte. In einem geschlossenen Modell ($\varepsilon = +1$) mit einer Periode von etwa $60 \cdot 10^9$ Jahren, d. h. $\varkappa\hat{M}/6 \approx 9 \cdot 10^{27}$ cm, kann sich z. B. eine Vakuole der Masse unserer lokalen Galaxiengruppe ($M \approx 2{,}5 \cdot 10^{17}$ cm) frühestens 128 Tage nach Weltanfang bilden.

*Literatur zu Kapitel 27.:*

[20], [37], [45], [57], [58], [68], [74], [82], [128], [136], [162], [186], [189], [203], [208].

# 28. Allgemeinere kosmologische Modelle

## 28.1. Was ist ein kosmologisches Modell?

Ein kosmologisches Modell ist ein Modell unserer Welt, das unter Beachtung und Verwendung aller bekannten physikalischen Gesetze die beobachteten Eigenschaften unseres Kosmos (näherungsweise) richtig widerspiegelt und insbesondere die Vorgänge in der Frühzeit der Welt im einzelnen erklärt. Ein solches Modell muß also z. B. verständlich machen, warum der Kosmos zur Zeit der Entstehung der kosmischen Hintergrundstrahlung weitgehend homogen und isotrop war und wie und wann die Inhomogenitäten (Galaxien, Sterne) entstanden. Es könnte auch erklären, ob die speziellen Eigenschaften unserer Welt (verglichen mit anderen denkbaren Welten) auf besondere Anfangsbedingungen zurückzuführen sind oder ob die Naturgesetze dafür sorgen, daß unabhängig von den Anfangsdaten ein stabiler und langlebiger Kosmos notwendigerweise unserer Welt ähnlich sein muß.

Kosmologische Modelle im engeren Sinne sind strenge Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen (mit dem Energieimpulstensor einer idealen Flüssigkeit), die wesentliche Züge unseres Kosmos richtig wiedergeben. Da es nur eine reale Welt gibt, mag die große Anzahl der bekannten oder möglichen kosmologischen Modelle zunächst überraschen. Zwei Gründe machen diese Vielzahl aber verständlich.

Erstens ist uns unser Kosmos nur in einem Ausschnitt bekannt, sowohl räumlich als auch zeitlich, und auch in diesem Ausschnitt sind die Beobachtungsergebnisse oft noch recht unsicher (z. B. der Wert des Beschleunigungsparameters). Alle Weltmodelle, die sich nur in der Nähe des Weltanfangs unterscheiden, müssen als gleichberechtigt zugelassen werden. In der Tat ist eine Reihe von Lösungen bekannt, die anfangs hochgradig inhomogen oder anisotrop sind und sich dann zunehmend einem

Friedmann-Kosmos nähern. Alle Weltmodelle, die eine Rotverschiebung und eine kosmische Hintergrundstrahlung ergeben, können kaum widerlegt werden. Dazu kommt die nicht auszuschließende Möglichkeit, daß unsere Welt *nicht* homogen und isotrop ist, sondern diese Eigenschaften nur in unserer Umgebung näherungsweise hat. Ein expandierender „Staubstern", also ein Ausschnitt eines Friedmann-Kosmos, der nach außen von einer statischen Schwarzschild-Metrik umgeben ist (vgl. das Modell des kollabierenden Sterns in Abschnitt 23.3.), ist vielleicht auch ein recht gutes Weltmodell.

Zweitens untersucht man auch Lösungen der Feldgleichungen, bei denen von vornherein klar ist, daß sie die Eigenschaften unserer Welt nicht richtig wiedergeben. Jedes Modell ist ja eine starke Vereinfachung der Wirklichkeit, und erst durch das Studium vieler Lösungen kann man feststellen, welche Vereinfachungen erlaubt und welche Voraussetzungen wesentlich sind. Man kann mit etwas Übertreibung sagen, daß es fast keine strenge Lösung der Feldgleichungen gibt, der man den Namen „kosmologisches Modell" nicht zugestehen könnte.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen aber nach wie vor Weltmodelle, die dem kosmologischen Prinzip insofern genügen, daß die Welt (der dreidimensionale Ortsraum) homogen ist, d. h., daß die Punkte auf einem Schnitt $t = \text{const}$ physikalisch nicht unterscheidbar sind. Außer den Robertson-Walker-Metriken gehören zu diesen Modellen alle Räume, die eine einfach transitive Bewegungsgruppe $G_3$ besitzen und demnach einem der Bianchi-Typen $I$ bis $IX$ zuzuordnen sind (vgl. Abschnitt 19.5.) oder die eine transivite Gruppe $G_4$ gestatten, die keine transitive Untergruppe $G_3$ besitzt (Kantowski-Sachs-Modelle). Auf zwei Beispiele solcher Weltmodelle wollen wir kurz eingehen.

## 28.2.* Lösungen vom Bianchi-Typ I mit inkohärenter Materie

Wenn der dreidimensionale Ortsraum der Ruheraum der Materie ist und drei kommutierende Killing-Vektoren besitzt, handelt es sich um homogene kosmologische Modelle vom Bianchi-Typ *I*. Da man die drei Killing-Vektoren gleichzeitig auf die Normalform

$$\underset{1}{\xi}^a = (1, 0, 0, 0), \qquad \underset{2}{\xi}^a = (0, 1, 0, 0), \qquad \underset{3}{\xi}^a = (0, 0, 1, 0) \tag{28,1}$$

transformieren kann, hängt in geeignet gewählten Koordinaten die Metrik nur von der Zeitkoordinate $x^4 = ct$ ab. Durch Transformationen $x^{4'} = x^{4'}(x^4)$, $x^{\alpha'} = x^\alpha + f^\alpha(x^4)$ kann man — ohne (28,1) zu zerstören — die Metrik immer in die Normalform

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + g_{\alpha\beta}(ct)\,dx^\alpha\,dx^\beta \tag{28,2}$$

bringen. Wie man sieht, sind die Unterräume $t = \text{const}$ flache dreidimensionale Ortsräume, in denen sich — jeweils für ein festes $t$ — kartesische Koordinaten einführen lassen.

Zur Berechnung des Krümmungstensors dieser Metrik benutzen wir die Reduktionsformeln (16,20). Sie geben

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\tfrac{1}{4}\,(\dot g_{\beta\mu}\dot g_{\alpha\nu} - \dot g_{\beta\nu}\dot g_{\alpha\mu}),\\ R^4{}_{\beta\mu\nu} &= 0,\\ R^4{}_{\beta 4\nu} &= \tfrac{1}{2}\,\ddot g_{\beta\nu} - \tfrac{1}{4}\,\dot g_{\beta\alpha}\dot g_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}. \end{aligned} \tag{28,3}$$

Die Feldgleichungen

$$R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} = \varkappa \mu u_a u_b \tag{28,4}$$

lauten dann, wenn wir die Beziehungen $\dot g/g = g^{\alpha\beta}\dot g_{\alpha\beta}$ und $\dot g^{\beta\nu} = -g^{\beta\alpha}g^{\nu\mu}\dot g_{\alpha\mu}$ berücksichtigen,

$$R_4^4 - \frac{R}{2} = -\frac{1}{8}\,\dot g_{\beta\nu}\dot g^{\beta\nu} - \frac{1}{8}\left(\frac{\dot g}{g}\right)^2 = -\varkappa\mu c^2, \tag{28,5}$$

$$R_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{R}{2} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\varrho}\dot g_{\varrho\beta}\right)^{\cdot} - \delta_\beta^\alpha \frac{\varkappa\mu c^2}{2} = 0 \tag{28,6}$$

(die Gleichungen $R_\alpha^4 = 0$ sind identisch erfüllt). Wegen der für inkohärente Materie immer geltenden Ruhemassenerhaltung (8,89) ist das Feldgleichungssystem nur dann integrabel, wenn

$$\varkappa\mu c^2 \sqrt{-g} = \hat{\mathrm{M}} = \text{const} \tag{28,7}$$

erfüllt ist.

Zur Integration der Feldgleichungen bilden wir in (28,6) die Spur; es entsteht die Differentialgleichung

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{\cdot\cdot} = \tfrac{3}{2}\hat{\mathrm{M}}, \tag{28,8}$$

die wir durch

$$\sqrt{-g} = \frac{3ct}{4}\left(\hat{\mathrm{M}}ct + A\right) \tag{28,9}$$

lösen können. Das volle System (28,6) kann man unter Verwendung von (28,7) einmal integrieren, mit dem Ergebnis

$$\dot g_{\beta\alpha} = \frac{\hat{\mathrm{M}}ct}{\sqrt{-g}}\, g_{\beta\alpha} + \frac{a_\alpha^\mu}{\sqrt{-g}}\, g_{\mu\beta}. \tag{28,10}$$

Führt man zu einem beliebigen festen Zeitpunkt ein kartesisches Koordinatensystem ein und legt dessen Achsen so, daß die konstante Matrix $a_\alpha^\mu$ Diagonalform hat, dann bleibt wegen (28,10) die Diagonalform der Metrik für alle Zeiten erhalten. Damit folgt aus (28,9) und (28,10)

$$\dot g_{11} = \left[\frac{3}{4}\,\frac{\hat{\mathrm{M}}}{\hat{\mathrm{M}}ct + A} + 2\,\frac{p_1 A}{ct(\hat{\mathrm{M}}ct + A)}\right] g_{11}, \qquad p_1 A = \frac{2}{3}\, a_1^1 \tag{28,11}$$

mit der Lösung

$$g_{11} = \text{const}\cdot\left(\hat{\mathrm{M}}ct + A\right)^{4/3}\left(\frac{ct}{\hat{\mathrm{M}}ct + A}\right)^{2p_1}. \tag{28,12}$$

Analoge Resultate ergeben sich für $g_{22}$ und $g_{33}$. Wir erhalten so schließlich die

Lösung

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + g_{11}\,\mathrm{d}x^2 + g_{22}\,\mathrm{d}y^2 + g_{33}\,\mathrm{d}z^2,$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= (-g)^{1/3}\left(\frac{ct}{\hat{\mathrm{M}}ct + A}\right)^{2p_1-2/3}, \\ g_{22} &= (-g)^{1/3}\left(\frac{ct}{\hat{\mathrm{M}}ct + A}\right)^{2p_2-2/3}, \qquad \varkappa\mu c^2\sqrt{-g} = \hat{\mathrm{M}}, \quad \sqrt{-g} = 3ct(\hat{\mathrm{M}}ct + A)/4, \\ g_{33} &= (-g)^{1/3}\left(\frac{ct}{\hat{\mathrm{M}}ct + A}\right)^{2p_3-2/3}, \end{aligned} \tag{28,13}$$

in der die drei Koeffizienten $p_i$ wegen (28,6) und (28,5) den Bedingungen

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{28,14}$$

genügen müssen, was z. B. durch

$$\begin{aligned} 2p_1 - \frac{2}{3} &= \frac{4}{3}\sin\alpha, & 2p_2 - \frac{2}{3} &= \frac{4}{3}\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \\ 2p_3 - \frac{2}{3} &= \frac{4}{3}\sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right), & -\frac{\pi}{6} &< \alpha \leqq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{28,15}$$

gewährleistet wird.

Für die Vierergeschwindigkeit $u^a = (0, 0, 0, c)$ der felderzeugenden Materie gilt

$$u_{a;b} = \frac{c}{2}\,g_{ab,4}. \tag{28,16}$$

Es handelt sich also (man vergleiche die Definitionen (17,11) der kinematischen Größen) um eine geodätische ($\dot{u}_a = 0$), rotationsfreie ($\omega_{ab} = 0$) Strömung, deren Expansionsgeschwindigkeit

$$\Theta = \frac{2\hat{\mathrm{M}}ct + A}{t(\hat{\mathrm{M}}ct + A)} \tag{28,17}$$

ist und deren Scherungsgeschwindigkeitskomponenten

$$\sigma_{ii} = \frac{cg_{ii}}{\sqrt{-g}}\,\frac{A}{4}\,(3p_i - 1) \qquad \text{(über } i \text{ nicht summieren!)} \tag{28,18}$$

sind. Die Integrationskonstante $A$ ist also ein Maß für die Scherung, während die $p_i$ deren Richtungsabhängigkeit charakterisieren.

Der Sonderfall $A = 0$, der in (28,13) nicht enthalten ist, führt zunächst auf

$$\dot{g}_{\beta\alpha} = \frac{4}{3ct}\,g_{\beta\alpha} - \frac{a^\mu_\beta g_{\mu\alpha}}{c^2t^2}. \tag{28,19}$$

Die Feldgleichungen sind jedoch nur für $a^\mu_\beta \equiv 0$ erfüllbar, es handelt sich für $A = 0$ um einen (isotropen) Friedmann-Kosmos mit $\varepsilon = 0$.

Die Metrik (28,13) beschreibt einen anisotropen expandierenden oder kontrahierenden homogenen Kosmos; die Abstände zwischen den Staubteilchen (die ja in diesen Koordinaten ruhen) verändern sich in richtungsabhängiger Weise, da der isotrope Fall $p_1 = p_2 = p_3$ im Widerspruch zu (28,14) steht. Für $A > 0$ (was durch Wahl der Zeitrichtung immer erreichbar ist) wird die Metrik bei $t = 0$ singulär, wenn wir uns von positiven $t$ her dem Zeitnullpunkt nähern,

Im allgemeinen Fall $\alpha \neq \pi/2$ ($p_3 \neq 0$) ist genau eines der $p_i$, nämlich $p_3$, negativ. Wegen

$$\frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{1}{ct(\hat{M}ct + A)}\left(\frac{4}{3}\hat{M}ct + 2p_3A\right), \quad p_3 < 0 \tag{28,20}$$

ist die relative Änderung der Abstände in $z$-Richtung für sehr kleine Zeiten sehr stark negativ; dieser Kollaps kommt für $ct = -3p_3A/2\hat{M}$ zum Stillstand, und es schließt sich eine Expansion an, In $x$- und $y$-Richtung dagegen expandiert der Kosmos ständig. Verfolgen wir von positiven $t$ aus seine Geschichte rückwärts, dann wird aus einer Kugel ein sehr lang gestrecktes dünnes Ellipsoid, im Grenzfall $t \to +0$ eine gerade Linie — es tritt eine „zigarrenförmige" Singularität auf.

Bemerkenswert dabei ist, daß für das Verhalten bei $t \to 0$ die Masse ($\hat{M}$) keine Rolle spielt; die Metrik (28,13) kann näherungsweise durch die Vakuumlösung (Kasner-Metrik)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (ct)^{2p_1}\,dx^2 + (ct)^{2p_2}\,dy^2 + (ct)^{2p_3}\,dz^2 - c^2\,dt^2, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \end{aligned} \tag{28,21}$$

ersetzt werden.

Im Ausnahmefall $\alpha = \pi/2$, d. h. $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$, gilt

$$\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\frac{4}{3}\hat{M}ct + 2A}{ct(\hat{M}ct + A)}, \quad \frac{\dot{g}_{22}}{g_{22}} = \frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{4\hat{M}}{3(\hat{M}ct + A)}. \tag{28,22}$$

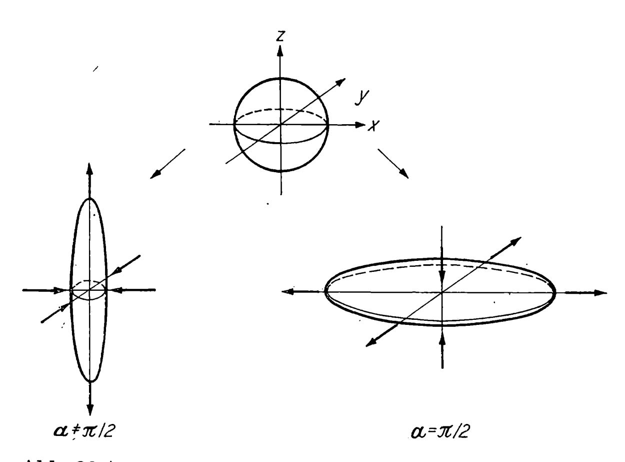



Abb. 28.1
Die beiden Typen der Singularität eines Bianchi-Typ-$I$-Kosmos

Ein singuläres Verhalten tritt für $t \to +0$ nur in der $x$-Richtung auf, und zwar so, daß (zeitlich rückwärts verfolgt) aus einer Kugel ein stark abgeplattetes Rotationsellipsoid und schließlich eine „Eierkuchen"-Singularität wird (vgl. Abb. 28.1).

Für große Zeiten nähert sich (unabhängig von $\alpha$) die Metrik der eines homogenen und isotropen Friedmann-Kosmos mit $\varepsilon = 0$.

## 28.3. Der Gödel-Kosmos

Der Gödel-Kosmos (Gödel 1949) ist ein homogener, aber anisotroper vierdimensionaler Raum mit der Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = a^2[\mathrm{d}x^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - (\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}t)^2], \qquad a = \text{const} \tag{28,23}$$

bzw.

$$\mathrm{d}s^2 = 4a^2[\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2 + (\sinh^2 r - \sinh^4 r)\,\mathrm{d}\varphi^2 - 2\sqrt{2}\,\sinh^2 r\,\mathrm{d}\varphi\,c\,\mathrm{d}t - c^2\,\mathrm{d}t^2]. \tag{28,24}$$

Er besitzt 5 Killing-Vektoren, die in den Koordinaten (28,23) die Gestalt

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\xi}^a = (0, 1, 0, 0), \quad \underset{2}{\xi}^a = (0, 0, 1, 0), \quad \underset{3}{\xi}^a = (0, 0, 0, 1), \\ &\underset{4}{\xi}^a = (1, -y, 0, 0), \quad \underset{5}{\xi}^a = (y, \mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{2}\,y^2, 0, -2\mathrm{e}^{-x}) \end{aligned} \tag{28,25}$$

haben. Sein Gravitationsfeld wird von dem Energieimpulstensor

$$T^{mn} = \frac{1}{2\varkappa a^2}\,g^{mn} + \frac{u^m u^n}{\varkappa c^2 a^2}, \qquad u^m = (0, 0, 0, c/a) \tag{28,26}$$

erzeugt, den wir entweder als den Energieimpulstensor einer idealen Flüssigkeit mit

$$p = \mu c^2 = 1/2\varkappa a^2 \tag{28,27}$$

interpretieren können, oder — da für physikalisch vernünftige Medien oder für Anwendungen in der Kosmologie dieser Druck im Verhältnis zur Ruhemassendichte zu groß ist — als einen Energieimpulstensor, der außer dem Beitrag der inkohärenten Materie noch das kosmologische Glied $\Lambda g_{mn}$ enthält [vgl. (9,4)]:

$$\mu = 1/\varkappa c^2 a^2, \qquad \Lambda = -1/2a^2. \tag{28,28}$$

Da von der kovarianten Ableitung $u_{a;b}$ der Vierergeschwindigkeit nur die Komponenten

$$u_{1;2} = -u_{2;1} = ac\,\mathrm{e}^x/2 \tag{28,29}$$

von Null verschieden sind, ist die Materieströmung geodätisch, scherungs- und expansionsfrei, rotiert aber mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_{ab}\omega^{ab}/2} = c/a\sqrt{2}. \tag{28,30}$$

Der Gödel-Kosmos ist zwar kein realistisches Weltmodell, besitzt aber eine Reihe interessanter Eigenschaften: Er ist eines der wenigen Weltmodelle, die rotierende Materie enthalten, und es gibt in ihm geschlossene zeitartige Linien, d. h., ein Beobachter kann seine eigene Vergangenheit beeinflussen.

### 28.4. Singularitätstheoreme

Von den Weltmodellen, die wir bisher kennengelernt haben, haben die physikalisch vernünftigen (Friedmann-Modelle, Bianchi-Typ $I$-Kosmen) eine Singularität in ihrer Entwicklungsgeschichte, d. h. einen Weltanfang oder „Urknall", während die physikalisch weniger realistischen (Einstein-Kosmos, De-Sitter-Kosmos, Gödel-Kosmos) zwar eine solche Singularität nicht besitzen, aber eben mit kosmologischer Konstante arbeiten oder eine wenig plausible Zustandsgleichung der Materie besitzen, keine Rotverschiebung zeigen oder unseren Vorstellungen von Kausalität widersprechen.

Da eine Singularität am Weltanfang eine doch etwas unwillkommene Eigenschaft von Weltmodellen ist, möchte man gern wissen, ob diese Singularität unausweichlich ist, wenn das Modell physikalisch vernünftig sein soll. Treten etwa Singularitäten nur in Weltmodellen hoher Symmetrie auf und verschwinden sie bei kleinen, in der Realität immer vorhandenen Abweichungen von der Symmetrie, oder hatten wir bei der Auswahl der Modelle Pech und in anderen Kosmen hoher Symmetrie (bei anderen Bianchi-Typen) treten Singularitäten nicht auf?

In Beantwortung der letzten der hier aufgeworfenen Fragen wollen wir jetzt zeigen, daß in Gravitationsfeldern, die von einer idealen Flüssigkeit erzeugt werden, deren Elemente sich rotationsfrei auf Geodäten bewegen, unter gewissen plausiblen Annahmen Singularitäten auftreten müssen. Unser Ausgangspunkt ist die Zerlegung (17,11) der kovarianten Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes $u_m$ der Flüssigkeit, also die Darstellung

$$u_{m;i} = \omega_{mi} + \sigma_{mi} + \tfrac{1}{3}\,\Theta(g_{mi} + u_m u_i/c^2) - \dot{u}_m u_i/c^2. \qquad (28,31)$$

Setzen wir sie in die für jeden Vektor $u_m$ gültige Gleichung

$$(u_{m;i;n} - u_{m;n;i})\, g^{mi} u^n = -R_{an} u^n u^a \qquad (28,32)$$

ein, erhalten wir unter Verwendung der Feldgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau} = -\Theta^2/3 - \sigma_{in}\sigma^{in} - \varkappa c^2(3p + \mu c^2)/2 + \omega_{in}\omega^{in} + \dot{u}^n{}_{;n}. \qquad (28,33)$$

Wenn wir noch

$$\mu c^2 + 3p \geqq 0 \qquad (28,24)$$

voraussetzen (physikalisch würden wir ja sogar $\mu \geqq 0$, $p \geqq 0$ erwarten), sind auf der rechten Seite der Gl. (28,33) alle Terme außer $\omega_{in}\omega^{in}$ und eventuell $\dot{u}^n{}_{;n}$ negativ. Verschwinden Rotation und Beschleunigung, dann gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\Theta}\right) \geqq \frac{1}{3}. \qquad (28,35)$$

$\Theta^{-1}$ war demnach entweder ($\Theta > 0$) vor endlicher Eigenzeit Null oder ($\Theta < 0$) wird nach endlicher Eigenzeit den Wert Null annehmen. Da die Expansion $\Theta$ ein Maß für die relative Volumenänderung ist, sind Singularitäten (mit $\Theta = \infty$) in solchen Modellen immer vorhanden. In den Friedmann-Kosmen entsprechen diese Singularitäten wegen $\Theta = 3c\dot{K}/K$ gerade den Nullstellen des Weltradius $K$.

Ein ähnlicher Schluß kann durchgeführt werden, wenn sich zwar die Materie selbst nicht rotationsfrei bewegt, es in dem Raum aber eine rotationsfreie geodätische

Kongruenz zeitartiger Weltlinien (Testteilchenschwarm) gibt. Da für zwei zeitartige, in die Zukunft gerichtete Einheitsvektoren $u^i/c$ und $V^i/c$ immer $u^i V_i \leqq -c^2$ und damit infolge der Feldgleichungen

$$R_{an} V^a V^n \geqq \varkappa c^2 (3p + \mu c^2)/2 \tag{28,36}$$

gilt, folgt auch für diese Geodäten die Ungleichung (28,35), der Testteilchenschwarm zeigt ein singuläres Verhalten. Im mathematischen Sinn ist also die Raum-Zeit singulär; ob sich auch die physikalischen Größen (Druck, Ruhemassendichte) singulär verhalten, muß gesondert untersucht werden.

In Verallgemeinerung dieser soeben bewiesenen Sätze kann man zeigen, daß in jedem Kosmos, der zu einem Zeitpunkt homogen ist (eine transitive räumliche Bewegungsgruppe besitzt), für den das dieser Anfangsfläche zugeordnete Cauchy-Problem eindeutig lösbar ist und in dem für alle zeit- oder nullartigen Vektoren $V^a$ die Bedingung $R_{ab} V^a V^b < 0$ erfüllt ist, eine Singularität existiert. Diese Singularität ist gekennzeichnet durch das Auftreten von Geodäten, die trotz endlicher Länge nicht fortsetzbar sind; die Art der physikalischen Singularität muß in jedem Fall gesondert geklärt werden.

Die Existenz von Singularitäten kann unter noch schwächeren Voraussetzungen bewiesen werden; Singularitäten treten z. B. in jedem räumlich geschlossenen Kosmos auf, der zu irgendeinem Zeitpunkt expandiert oder kontrahiert.

*Literatur zu Kapitel 28.:*

[9], [44], [46], [65], [130], [131], [132], [140], [165], [167], [168], [199].

# Nichteinsteinsche Gravitationstheorien

## 29. Klassische Feldtheorien

### 29.1. Warum und wie verallgemeinert man die Einsteinsche Theorie?

Trotz der großen Erfolge der Einsteinschen Gravitationstheorie ist natürlich die Frage berechtigt, ob diese Theorie die Eigenschaften der Materie richtig wiedergibt. Dabei ist zu unterscheiden zwischen der Frage, ob die Theorie überhaupt innerhalb gewisser enger Grenzen, z. B. in der Himmelsmechanik des Planetensystems oder der Zustandsgleichung der Sterne, gültig ist oder nicht und der zweiten, prinzipiell bei jeder Theorie zu stellenden Frage nach dem Gültigkeitsbereich und der Einbeziehung anderer Wechselwirkungsarten.

Die Motive zur Abänderung der Einsteinschen Theorie überstreichen ein breites Spektrum. Sie umfassen sowohl die schon von EINSTEIN verfolgte Idee der „Geometrisierung“ auch anderer Felder (etwa des elektromagnetischen) wie auch Abänderungsversuche aufgrund des Zweifels an der Richtigkeit der Theorie unter extremen Bedingungen (Gravitationskollaps, kosmologische Singularität), sie enthalten das Bemühen um eine Absicherung der Einsteinschen Theorie durch Vergleich der experimentellen Befunde mit den Vorhersagen der Einsteinschen oder anderer Theorien ebenso wie eine auf Vorurteilen begründete Ablehnung. Bis jetzt allerdings gibt es noch keinen Hinweis auf falsche Vorhersagen der Einsteinschen Theorie, also keinen Zwang zur Änderung.

Die meisten nichteinsteinschen Gravitationstheorien folgen EINSTEIN auf dem Weg der „Geometrisierung“ der Schwerkraft, d. h. der Benutzung einer — dann allerdings meist nichtriemannschen — Geometrie zur Darstellung der Gravitationswechselwirkung der Materie; der tiefere physikalische Grund dafür liegt wohl darin, daß so am einfachsten die Gleichheit von schwerer (passiver) und träger Masse berücksichtigt werden kann. Ohne auf Einzelheiten eingehen zu können, wollen wir für einige von uns recht willkürlich ausgewählte Theorien die Grundideen skizzieren.

In der Einsteinschen Theorie werden die Materie und ihre Wechselwirkungen mit zwei verschiedenen Typen physikalischer Größen beschrieben (die sich auch schon rein optisch in der üblichen Schreibweise der Feldgleichungen unterscheiden lassen), nämlich durch metrische Größen, die das Gravitationsfeld beschreiben, und durch nichtmetrische Größen, die die anderen Felder darstellen. Um eine „einheitliche“ Feldtheorie zu haben und z. B. auch das Maxwell-Feld durch rein geometrische Größen zu beschreiben, verläßt man den Rahmen der Riemannschen Geometrie.

In der Weylschen Theorie (WEYL 1918) werden Längen- und Winkelmessung durch einen symmetrischen metrischen Tensor $g_{mn}$ oder die metrische Fundamentalform

$$\mathrm{d}s^2 = g_{mn}\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n, \qquad m, n = 1, \ldots, 4, \qquad g_{mn} = g_{nm} \tag{29,1}$$

gegeben. Geändert wird gegenüber der Riemannschen Geometrie der affine Zusammenhang: Die bei der Definition

$$\frac{\mathrm{d}T^a}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^a_{nm} T^m \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{29,2}$$

der Parallelverschiebung eines Vektors längs einer Kurve auftretenden Affinitäten

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{nm} &= \tfrac{1}{2}\, g^{ab}(g_{bn,m} + g_{bm,n} - g_{nm,b}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, g^{ab}(g_{bn}Q_m + g_{bm}Q_n - g_{nm}Q_b) \end{aligned} \tag{29,3}$$

unterscheiden sich von den Christoffel-Symbolen durch die letzten Terme. Die neu hinzugekommenen Freiheitsgrade können bei Identifizierung des Vektors $Q_m$ mit dem Viererpotential zur Beschreibung des Maxwell-Feldes genutzt werden.

In der Einsteinschen asymmetrischen Theorie (1946/50) wird die Geometrie durch einen 16komponentigen (verallgemeinerten metrischen) asymetrischen Tensor $g_{mn}$ bestimmt, dessen zusätzlicher antisymmetrischer Anteil den 6 Feldstärkekomponenten des Maxwell-Feldes zugeordnet wird. Die Feldgleichungen werden dann (wie es auch in der Weylschen Theorie geschieht) aus einem Variationsprinzip mit dem verallgemeinerten Krümmungsskalar als Lagrange-Dichte abgeleitet.

Auch in den verschiedenen Varianten der projektiven Feldtheorie (Kaluza 1921, Klein 1926 und viele andere) versucht man eine einheitliche Beschreibung von Elektromagnetismus und Schwerkraft auf geometrischer Basis durchzuführen. Ausgangspunkt ist hier die Eigenschaft eines fünfdimensionalen Raumes, daß die Gruppe der Transformationen, bei welchen die neuen Koordinaten homogene Funktionen ersten Grades der alten Koordinaten sind, isomorph zu der aus Koordinatentransformationen eines vierdimensionalen Raumes und aus Eichtransformationen des Viererpotentials erzeugten Gruppe ist, also isomorph zu der Invarianzgruppe der Einstein-Maxwell-Theorie. Man kann daher erwarten, daß in einem fünfdimensionalen Raum die Einstein-Maxwell-Theorie besonders einfach darstellbar ist; natürlich lassen sich alle Größen des abstrakten fünfdimensionalen Raumes auf die physikalischen Größen der Raum-Zeit eindeutig abbilden. Es ist so zunächst eine der üblichen Theorie völlig äquivalente Darstellung in einem fünfdimensionalen Raum möglich, wobei allerdings die 15 Komponenten (Freiheitsgrade) eines symmetrischen metrischen Tensors in 5 Dimensionen etwas künstlich einzuschränken sind (vierdimensionale Metrik plus Viererpotential geben nur 14 Komponenten). Läßt man diese Einschränkung fallen, tritt in der Theorie ein neues skalares Feld auf, das man z. B. als Feld einer orts- und zeitabhängigen (über die Feldgleichungen: von der Verteilung der Ladungen und Massen abhängigen) Gravitationszahl interpretieren kann. Diese Veränderlichkeit der Gravitations„konstanten“ ist natürlich besonders bedeutsam für die Kosmologie; ihr möglicher Nachweis liegt aber zur Zeit noch außerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit.

Eine diesen projektiven Theorien (besonders der Jordanschen aus dem Jahre 1955) sehr verwandte Theorie ist die Skalar-Tensor-Theorie der Gravitation von Brans und Dicke (1961). In ihr wird das Gravitationsfeld außer durch den metrischen Tensor noch durch ein skalares Feld $\Phi(x^i)$ beschrieben, das durch die Spur $T = T^a{}_a$ des Energieimpulstensors gemäß

$$\Phi^n{}_{;n} = T/(3 + 2\omega) \tag{29,4}$$

bestimmt wird und in die verallgemeinerten Feldgleichungen

$$R_{mn} - \frac{R}{2} g_{mn} = \frac{1}{\Phi} T_{mn} + \frac{\omega}{\Phi^2} \left( \Phi_{,n} \Phi_{,m} - \frac{1}{2} \Phi^{,a} \Phi_{,a} g_{nm} \right) + \frac{1}{\Phi} \left( \Phi_{;nm} - g_{nm} \Phi^{,a}{}_{;a} \right) \tag{29,5}$$

so eingeht, daß die Bewegung der felderzeugenden Massen nur indirekt (über die Metrik) von der reziproken Gravitationszahl $\Phi$ abhängt, d. h. nach wie vor

$$T^m{}_{n;m} = 0 \tag{29,6}$$

gilt. Diese Feldgleichungen lassen sich aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int \left[ \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi_{,n} \Phi^{,n} + \frac{1}{2} \overset{\mathrm{M}}{L} \right] \sqrt{-g} \, \mathrm{d}^4 x = 0 \tag{29,7}$$

ableiten. Die Konstante $\omega$ ist ein dimensionsloser Kopplungsparameter, der aus dem Experiment zu bestimmen ist; bei geeigneten Randbedingungen entspricht $\omega \to \infty$ ($\Phi$ = const) der Einsteinschen Theorie.

Ein ganz anderes Ziel als die Einbeziehung des Maxwell-Feldes oder die Einführung einer variablen Gravitationszahl wird von der Cartanschen Theorie (Cartan 1922) verfolgt und zum Teil auch von den sogenannten Tetradentheorien. In der klassischen Feldtheorie und in der Quantenfeldtheorie stehen ja Energieimpulstensor (zugeordnet den raum-zeitlichen Translationen des Minkowski-Raumes) und Spintensor bzw. Drehimpulstensor (zugeordnet den raum-zeitlichen Drehungen) formal gleichwertig nebeneinander. In der Einsteinschen Gravitationstheorie jedoch entspricht nur dem Energieimpulstensor (der Masse) eine geometrische Eigenschaft des Raumes. Man kann nun auch dem Spin ein geometrisches Abbild zuordnen, indem man neben dem metrischen Tensor $g_{mn}$ Affinitäten

$$\Gamma^m_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{mn} (g_{na,b} + g_{nb,a} - g_{ab,n}) + g^{mn} (S_{abn} + S_{nab} - S_{bna}) \tag{29,8}$$

benutzt, die asymmetrisch sind und den Torsionstensor $S_{abn} = -S_{ban}$ mit 24 unabhängigen Komponenten als neue Freiheitsgrade enthalten. Ein anschauliches Bild der Wirkungsweise dieses Torsionstensors kann man dadurch gewinnen, daß man in jedem Punkt der Raum-Zeit vier orthonormierte Einheitsvektoren einführt und sie mit den Affinitäten parallel transportiert: Sie werden dabei gedreht (6 Freiheitsgrade), und zwar abhängig von der Richtung des Paralleltransports (4 Freiheitsgrade).

## 29.2. Mögliche Tests von Gravitationstheorien und der PPN-Formalismus

Über die Richtigkeit einer Theorie der Gravitation entscheiden natürlich nicht die Ansichten ihres Erfinders und seiner eventuellen Anhänger, sondern allein die Übereinstimmung der Vorhersagen der Theorie mit den Beobachtungsergebnissen. Logische und formale Einfachheit, Schönheit — Argumente, die besonders häufig zugunsten der Einsteinschen Theorie ins Feld geführt werden — sind sicher wichtige Kriterien bei der Aufstellung einer Theorie, aber für sich allein nicht ausreichend.

Wie jede neue physikalische Theorie muß auch eine Gravitationstheorie eine Reihe gewissermaßen „natürlicher" Bedingungen erfüllen: Sie muß in sich widerspruchsfrei

sein, sich in das Gefüge der vorhandenen Theorien einordnen und sich mit diesen verknüpfen lassen (z. B. nicht nur die Bahnen neutraler, sondern auch geladener Massepunkte geben), und sie muß ihren Vorgänger, d. h. die Newtonsche Gravitationstheorie, als Grenzfall oder Spezialfall enthalten.

Außerdem muß eine Gravitationstheorie wenigstens qualitativ die heute gesicherten Effekte richtig wiedergeben, also die Gleichheit von träger und schwerer Masse, das Äquivalenzprinzip, die kosmologische Rotverschiebung, die Lichtablenkung an der Sonne, die Laufzeitverlängerung im Sonnenfeld und die Periheldrehung.

Formal am einfachsten lassen sich metrische Theorien überprüfen. Metrische Theorien sind Theorien, bei denen wie in der Einsteinschen die Wirkung der Gravitation auf die Materie ausschließlich auf dem metrischen Tensor $g_{mn}$ beruht; sie unterscheiden sich voneinander durch die Feldgleichungen, aus denen die Metrik zu bestimmen ist. Die Brans-Dicke-Theorie ist also metrisch, die Cartansche nicht. Metrische Theorien berücksichtigen automatisch das Äquivalenzprinzip und die durch Messungen im Erd- oder Sonnenfeld bis auf einen Fehler von höchstens $10^{-12}$ nachgewiesene Gleichheit von träger und schwerer Masse. Sie enthalten außerdem die Newtonsche Gravitationstheorie, wenn in einem Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt der felderzeugenden Masse ruht ($T_{44}$ die bedeutendste Komponente des Energieimpulstensors ist), die Näherung

$$\overset{1}{g}_{44} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \quad U(x^\alpha, t) = -\frac{\varkappa c^2}{8\pi} \int \frac{T_{44}(\bar{x}^\alpha, t)}{|x^\alpha - \bar{x}^\alpha|} \, d^3\bar{x}$$
$$\overset{1}{g}_{4\alpha} = 0, \tag{29,9}$$
$$\overset{1}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta},$$

die richtigen Bewegungsgleichungen für Testteilchen gibt.

Da die Messungen der Gravitationseffekte in unserem Sonnensystem weitaus genauer sind als die der kosmologischen Effekte, wird man zur Überprüfung von Gravitationstheorien eben diese solar-terrestrischen Effekte nehmen. In sie alle geht nicht die exakte Form der Metrik ein; es genügt und ist hinreichend genau, die Näherung einen Schritt weiter als in (29,9) zu treiben, also die post-Newtonsche Näherung zu nehmen. In dieser Näherung kann man die verschiedenen metrischen Theorien durch die Zahlenwerte gewisser dimensionsloser Parameter unterscheiden, die angeben, wie die Materieverteilung (die Komponenten des Energieimpulstensors) in die Metrik eingeht. Man spricht deshalb von einem parametrisierten post-Newtonschen (PPN-) Formalismus. Die Zahlenwerte dieser Parameter lassen sich aus den Beobachtungen und Experimenten bestimmen (vgl. Abschnitt 10.7.). Bisher ist noch keiner der Einsteinschen Werte der Parameter ernsthaft anzuzweifeln; der PPN-Formalismus dient mehr dazu, klarer sagen zu können, wie genau die Allgemeine Relativitätstheorie im Vergleich zu anderen möglichen Theorien durch die Experimente bestätigt wird.

*Literatur zu Kapitel 29.:*

[15], [21], [49], [53], [54], [59], [107], [110], [145], [156], [160], [198], [207].

# 30. Relativitätstheorie und Quantentheorie

## 30.1. Aufgabenstellung

Die Allgemeine Relativitätstheorie fügt die Gravitationstheorie nahtlos mit allen anderen klassischen Theorien zusammen. Wenn auch Einzelheiten der Ankopplung eines klassischen Feldes (Maxwell-Feld, Dirac-Feld, Neutrinofeld, Klein-Gordon-Feld) an das metrische Feld nicht immer willkürfrei sind und auch noch nicht mit hinreichender Genauigkeit experimentell nachgeprüft werden können, so besteht an der inneren Konsistenz des Verfahrens kein Zweifel.

Dieses optimistische Bild wird etwas getrübt, wenn man sich klarmacht, daß neben dem Gravitationsfeld das Maxwell-Feld das einzige in unserer Welt wirklich beobachtbare *klassische* Feld ist, während die Vielzahl der anderen Wechselwirkungen zwischen den Bausteinen der Materie nur mit Hilfe der Quantentheorie beschrieben werden kann. Eine Vereinigung von Relativitätstheorie und Quantentheorie ist jedoch bisher noch nicht gelungen.

Eines der Hauptpostulate der Relativitätstheorie ist, daß in jedem Raum-Zeit-Punkt ein lokal geodätisches Koordinatensystem eingeführt werden kann, also lokal die Wirkung der Schwerkraft nicht wirksam wird und der Raum näherungsweise ein Minkowski-Raum ist. Damit ist zwar verständlich, wieso in unserer Umgebung mit ihrer relativ geringen Raumkrümmung der Raum in sehr guter Näherung so ist, wie ihn die Quantentheorie voraussetzt, aber es zeigt uns auch die Grenzen dieses gewissermaßen störungsfreien Nebeneinanderlebens von Quantentheorie und Relativitätstheorie: In Gebieten starker Krümmung (in der Nähe von Singularitäten) und bei Fragestellungen, die das Verhalten weit ausgedehnter physikalischer Systeme betreffen, sind beide Theorien nicht mehr vereinbar, da sie von verschiedenen Raumstrukturen ausgehen. Die Quantentheorie setzt sowohl bei den grundlegenden Vertauschungsregeln, die unter expliziter Benutzung der Bewegungsgruppe des Raumes (der Lorentz-Gruppe) formuliert werden, als auch bei technischen Detailfragen wie Entwicklung nach ebenen Wellen, asymptotisches Verhalten im Unendlichen oder der Formulierung von Erhaltungssätzen einen unendlich ausgedehnten Minkowski-Raum voraus. Die Relativitätstheorie zeigt aber, daß der Raum ein Riemannscher Raum ist.

Andererseits führt die Auffassung der Relativitätstheorie, daß die Raumeigenschaften Eigenschaften der Wechselwirkung der Materie sind und durch materielle Testkörper ausgemessen werden können, zu Widersprüchen bei der Definition oder Messung sehr kleiner Abstände, also der Metrik in sehr kleinen Raumbereichen: Sind die Dimensionen so klein, daß Atome oder Elementarteilchen als Testobjekte genommen werden müßten, ist deren Ort nicht mehr so genau definiert, daß man wirklich von einer Messung, sei es auch nur in einem Gedankenexperiment, sprechen kann.

Da aber in der Natur Sterne existieren, die aus Elementarteilchen bestehen und deren Bewegung den Gravitationsgesetzen gehorcht, muß eine widerspruchsfreie Zusammenfügung von Relativitätstheorie und Quantentheorie möglich sein, wobei zu erwarten ist, daß dazu mindestens eine dieser beiden Theorien abgeändert werden muß. Allerdings sind die theoretischen Physiker dabei in einer schlechten Lage: Im Gegensatz zur Elementarteilchenphysik, die eine Vielzahl experimenteller Daten

bietet und auf der Suche nach einer theoretischen Deutung ist, liegen keine experimentellen Befunde vor (oder sind zumindest als solche nicht erkannt), die einen Hinweis auf den einzuschlagenden Weg geben könnten.

Drei verschiedene Möglichkeiten zur Vereinigung von Relativitätstheorie und Quantentheorie bieten sich natürlicherweise an; wir wollen sie in den folgenden Abschnitten kurz darstellen.

## 30.2. Einheitliche Quantenfeldtheorie und Quantisierung des Gravitationsfeldes

Nachdem es gelungen war, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung in einer einheitlichen Quantenfeldtheorie zu erfassen (Weinberg und Salam 1967), haben sich theoretische Physiker das ehrgeizige Ziel gesetzt, nicht nur die starke Wechselwirkung mit einzubeziehen (Grand Unification Theories), sondern alle vier bekannten Wechselwirkungsarten in einer einzigen Theorie zu beschreiben, z. B. in einer der supergravity- oder superstring-Theorien. Bis jetzt zeichnen sich noch keine überzeugenden Erfolge ab. Aber vielleicht ist auch die „Weltformel", nach der sowohl die Relativitätstheorie als auch die Elementarteilchentheorie suchen, ein Traumbild: Die Einheitlichkeit unserer Welt muß sich selbst bei Beschränkung auf die unterste, physikalische Ebene nicht unbedingt in der Existenz einer einfachen einheitlichen Formel widerspiegeln.

Ein weniger anspruchsvolles Programm ist die Quantisierung allein des Gravitationsfeldes. Eine Reihe physikalischer und mathematisch-formaler Gründe spricht dafür, alle Felder und Wechselwirkungen einheitlich zu behandeln, d. h. auch das Gravitationsfeld zu quantisieren. Die ersten Schritte dazu hat man schon getan. So kann man z. B. auf der Grundlage der in Kapitel 16. dargestellten Analyse des Cauchy-Problems der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen die in der Metrik enthaltenen echten dynamischen Freiheitsgrade des Feldes bestimmen (also solche, die nicht bloßen Koordinatentransformationen entsprechen) und als Ausgangspunkt einer kanonischen Quantisierung nehmen. Viel Arbeit und Mühe ist investiert worden, um die quantisierte Einsteinsche Theorie nicht nur formal aufzuschreiben, sondern auch physikalisch zu interpretieren und zu verstehen, aber noch steht man am Anfang des Weges. Das „Bild" der Welt (des vierdimensionalen Raumes) würde sich in einer quantisierten Gravitationstheorie sehr verändert darstellen. Zu jedem Zeitpunkt ist die Welt ein Gemisch von Zuständen, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit realisiert werden. Jeder Zustand entspricht einer möglichen dreidimensionalen Geometrie einschließlich ihrer topologischen Eigenschaften und kann durch einen Punkt im sogenannten *superspace* dargestellt werden. Wie man zusätzlich die nichtmetrischen Felder ankoppelt, wie man die „$\Psi$-Funktion der ganzen Welt" zu interpretieren hat und wie schließlich der Meßprozeß bzw. der Beobachter einbezogen werden kann, ist unklar.

Keine Schwierigkeiten bietet die Quantisierung der *linearisierten* Einsteinschen Theorie, also des den Gleichungen

$$\Box \bar{f}_{mn} = 0, \qquad \bar{f}^{mn}{}_{,n} = 0 \tag{30,1}$$

genügenden klassischen Feldes $\bar{f}_{mn}$ (vgl. Abschnitt 13.2.). Es zeigt sich, daß die den Photonen des elektromagnetischen Feldes entsprechenden masselosen Quanten

dieses Feldes, die Gravitonen, Spin 2 besitzen. Natürlich hat man mit diesem Ausweichen auf quellenfreie schwache Felder die wirklichen Probleme nur unter den Teppich gekehrt.

## 30.3. Halbklassische Gravitationstheorie

Ein möglicher Ausweg aus den Problemen, die beim Versuch der Quantisierung des Gravitationsfeldes entstehen, besteht darin, das Gravitationsfeld als klassisches Feld zu behandeln, aber alle anderen Felder zu quantisieren. Diese Idee wird besonders von denjenigen unterstützt, die dem Gravitationsfeld eine Sonderrolle einräumen und der Ansicht sind, daß es prinzipiell nicht quantisiert werden soll und darf. Am ausgeprägtesten wurde dieser relativistisch-konservative Standpunkt wohl von EINSTEIN selbst vertreten. Er hoffte zeitweise sogar, daß die Quantentheorie derart in einer (eventuell noch zu erweiternden) Relativitätstheorie enthalten sein könnte, daß die Singularitäten des Raumes den Elementarteilchen entsprechen würden. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt.

Die Ankopplung des Gravitationsfeldes an die Quantenfelder erfolgt in einer halbklassischen Theorie zum einen dadurch, daß die Feldgleichungen der nichtmetrischen Felder kovariant formuliert und damit vom Gravitationsfeld abhängig gemacht werden. Zum anderen wird das Gravitationsfeld von den Quantenfeldern erzeugt; dabei dürfen in den Einsteinschen Feldgleichungen als Quelle (im Energieimpulstensor) natürlich keine Operatoren auftreten, sondern nur Erwartungswerte:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} = \varkappa \langle T_{mn} \rangle . \tag{30,2}$$

Die Erwartungswerte der Komponenten des Energieimpulstensors müssen divergenzfrei sein,

$$\langle T^{mn} \rangle_{;n} = 0 , \tag{30,3}$$

da sonst die Feldgleichungen (30,2) nicht integrabel sind.

Wie eine Analyse zeigt, ist (30,3) nicht — wie im klassischen Fall — eine einfache Folgerung aus den (hier nicht aufgeschriebenen) Feldgleichungen des Quantenfeldes, sondern vor allem eine Bedingung für den bzw. die Zustände, mit denen die Erwartungswerte zu bilden sind. Gerade in der Auswahl, Bedeutung und Interpretation der Zustände, beginnend bei der Definition des Vakuumzustandes, liegt das Hauptproblem bei dieser Art Vereinigung von Quanten- und Relativitätstheorie. Dazu kommen Schwierigkeiten bei der Übertragung der üblichen Interpretation des Meßprozesses auf eine nichtlineare Theorie, in der das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt. Zur Zeit kann noch nicht gesagt werden, ob eine solche halbklassische Gravitationstheorie widerspruchsfrei möglich bzw. innerhalb welcher Grenzen sie eine gute Näherung und mit den Beobachtungen verträglich ist.

## 30.4.* Quantisierung in einem vorgegebenen klassischen Gravitationsfeld. Die Thermodynamik Schwarzer Löcher

Einen gewissen Einblick in die Probleme und Ergebnisse der noch zu findenden einheitlichen Theorie kann man dadurch gewinnen, daß man die Rückwirkung des Quantenfeldes auf das Gravitationsfeld — also das vom Quantenfeld erzeugte

Schwerefeld — vernachlässigt und nur den Einfluß eines vorgegebenen Schwerefeldes auf ein Quantenfeld untersucht. Am Beispiel eines masselosen reellen skalaren Feldes $\Phi(x^i)$,

$$\Box\Phi = \Phi^{,n}{}_{;n} = 0, \qquad (30,4)$$

wollen wir das typische Vorgehen und einige Ergebnisse und Fragestellungen kurz skizzieren.

Um das der Wellengleichung (30,4) genügende klassische Feld $\Phi$ *im Minkowski-Raum* zu quantisieren, würde man etwa folgendermaßen vorgehen. Zunächst stellt man die allgemeine (klassische) Lösung von (30,4) als Fourier-Integral bezüglich der Zeit $t$ dar und zerlegt dabei das Integral in Wellen positiver ($e^{-i\omega t}$) und negativer ($e^{+i\omega t}$) Frequenz:

$$\Phi(x^a) = \int_0^\infty [\Phi_\omega(x^\alpha)\, e^{-i\omega t} + \bar{\Phi}_\omega(x^\alpha)\, e^{i\omega t}]\, d\omega, \qquad \alpha = 1, \ldots, 3. \qquad (30,5)$$

Auf den Flächen $t = \text{const}$ konstruiert man ein vollständiges, orthogonales (und normiertes) System $f_p(x^\alpha)$ und $\bar{f}_p(x^\alpha)$ von Lösungen der zeitfreien Wellengleichung, nach denen sich $\Phi_\omega$ und $\bar{\Phi}_\omega$ entwickeln lassen. Dabei wird die Norm

$$(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int (\Psi_1 \dot{\bar{\Psi}}_2 - \dot{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2)\, d^3x = \overline{(\Psi_2, \Psi_1)} \qquad (30,6)$$

zugrunde gelegt. Jede Lösung der Wellengleichung läßt sich dann als Überlagerung von Partialwellen $g_n$ der Struktur $f_p(x^\alpha)\, e^{-i\omega t}$ und der konjugiert komplexen $\bar{g}_n$ darstellen; der Index $n$ steht dabei symbolisch für die (oft diskreten) Wertemöglichkeiten von $p$ und die kontinuierlich wählbaren Frequenzwerte $\omega$. Wegen der Struktur der Norm (30,6) genügen die Funktionen $g_n$ und $\bar{g}_n$ den Gleichungen

$$(g_n, \bar{g}_m) = 0, \qquad (g_n, g_m) = -(\bar{g}_n, \bar{g}_m). \qquad (30,7)$$

Den allgemeinen hermiteschen Feldoperator $\boldsymbol{\Phi}(x^\alpha, t)$ kann man dann in der Form

$$\boldsymbol{\Phi}(x^\alpha, t) = \sum_n \left(\boldsymbol{a}_n g_n(x^\alpha, t) + \boldsymbol{a}_n^+ \bar{g}_n(x^\alpha, t)\right) \qquad (30,8)$$

schreiben, wobei die Operatoren $\boldsymbol{a}_n$ und $\boldsymbol{a}_n^+$ die Vertauschungsregeln

$$[\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n'}] = 0 = [\boldsymbol{a}_n^+, \boldsymbol{a}_{n'}^+], \qquad [\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n'}^+] = \delta_{nn'} \qquad (30,9)$$

erfüllen. Den Hilbert-Raum des Systems bilden alle Zustände, die durch ein- oder mehrfache Anwendung der Erzeugungsoperatoren $\boldsymbol{a}_n^+$ auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ entstehen. Dabei ist der Vakuumzustand so definiert, daß in ihm keine Teilchen vernichtet werden können,

$$\boldsymbol{a}_n\, |0\rangle = 0, \qquad (30,10)$$

und Einteilchenzustände $|1_n\rangle$ (ein Teilchen der Sorte $n$) werden aus ihm entsprechend

$$\boldsymbol{a}_n^+\, |0\rangle = |1_n\rangle \qquad (30,11)$$

erzeugt. Die Zahl der in einem Zustand insgesamt vorhandenen Teilchen erhält man unter Benutzung des Teilchenzahloperators

$$N = \sum_n N_n = \sum_n \boldsymbol{a}_n^+ \boldsymbol{a}_n. \qquad (30,12)$$

Man kann zeigen, daß diese Quantisierungsprozedur lorentzinvariant ist; insbesondere hängt der Vakuumzustand nicht von der (zufälligen) Wahl der Flächen $t = \text{const.}$ ab.

Will man dieses eben geschilderte Verfahren auf einen *gekrümmten Raum* übertragen, stößt man auf eine Reihe von Schwierigkeiten, die eigentlich alle mit der Nichtexistenz einer ausgezeichneten Zerlegung des Raumes in dreidimensionale raumartige Schnitte und einer möglicherweise vom Minkowski-Raum abweichenden topologischen Struktur der Raum-Zeit zu tun haben. Zwei verschiedene Zerlegungen des Raumes führen im allgemeinen zu verschiedenen Systemen $g_n$ und $\hat{g}_n$ von Partialwellen, d. h. zu zwei verschiedenen Teilchendefinitionen.

Betrachtet man die Zerlegung des allgemeinen Feldoperators nach zwei solchen Systemen

$$\Phi = \sum_n (\boldsymbol{a}_n g_n + \boldsymbol{a}_n^+ \bar{g}_n) = \sum_m (\hat{\boldsymbol{a}}_m \hat{g}_m + \hat{a}_m + \hat{\bar{g}}_m), \tag{30,13}$$

deren zugeordnete Vakuumzustände $|0\rangle$ und $|\hat{0}\rangle$ sind,

$$\boldsymbol{a}_n |0\rangle = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{a}}_n |\hat{0}\rangle = 0, \tag{30,14}$$

dann müssen wegen der Vollständigkeit beider Funktionssysteme sich die Funktionen und Operatoren der beiden Systeme ineinander umrechnen lassen. Es müssen also Relationen der Gestalt

$$\begin{aligned} \hat{g}_n &= \sum_m (\alpha_{nm} g_m + \beta_{nm} \bar{g}_m), \\ g_n &= \sum_m (\bar{\alpha}_{mn} \hat{g}_m - \beta_{mn} \hat{\bar{g}}_m) \end{aligned} \tag{30,15}$$

mit konstanten (komplexen) Koeffizienten $\alpha_{nm}$ und $\beta_{nm}$ bestehen („Bogoljubow-Transformation"). Setzt man (30,15) in (30,13) ein, erhält man als Umrechnungsformel für die Operatoren

$$\boldsymbol{a}_m = \sum_n (\alpha_{nm} \hat{\boldsymbol{a}}_n + \bar{\beta}_{nm} \boldsymbol{a}_n^+). \tag{30,16}$$

Es sind also nicht nur die Teilchen-(Partialwellen-) Definitionen in beiden Systemen verschieden, sondern es kann auch sein (für $\beta_{nm} \neq 0$), daß das, was der eine Beobachter als Vakuum $|\hat{0}\rangle$ bezeichnet, für den anderen ein Gemisch von Teilchen ist:

$$\boldsymbol{a}_m |\hat{0}\rangle = \bar{\beta}_{nm} \hat{\boldsymbol{a}}_n^+ |\hat{0}\rangle = \bar{\beta}_{nm} |\hat{1}_n\rangle. \tag{30,17}$$

Dieses überraschende Ergebnis zeigt deutlich, daß im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie der Teilchenbegriff fragwürdiger ist als man zunächst vermuten mag. Eigentliche Lorentz-Transformationen im Minkowski-Raum haben $\beta_{mn} = 0$, ändern also den Vakuumzustand nicht. Aber schon ein *beschleunigt* bewegter Beobachter würde im „üblichen" Vakuumzustand des Minkowski-Raumes Teilchen (mit einem thermischen Spektrum) feststellen.

Eine unmittelbare physikalische Folge dieser Eigenschaften eines Quantenfeldes ist die Möglichkeit, daß ein Gravitationsfeld Teilchen erzeugt. Stellt man sich z. B. vor, daß am Anfang (für $t \to -\infty$) ein flacher Raum mit dem Vakuum $|\hat{0}\rangle$ vorliegt und dann ein Gravitationsfeld an- und wieder abgeschaltet wird, so daß am Ende (für $t \to +\infty$) der Raum wieder ein Minkowski-Raum ist, dann wird dessen Vakuum

$|0\rangle$ nicht immer mit dem Anfangsvakuum $|\hat{0}\rangle$ übereinstimmen: Es sind Teilchen erzeugt worden.

Das spektakulärste Beispiel für eine Teilchenerzeugung im Gravitationsfeld bietet allerdings das Gravitationsfeld eines kollabierenden Sterns, d. h. eines sich bildenden Schwarzen Loches. Wir wollen die Grundideen am Beispiel des kugelsymmetrischen Kollaps skizzieren. Wir benutzen dazu die in Kapitel 22. eingeführten Eddington-Finkelstein-Koordinaten, in denen die Schwarzschild-Lösung die Gestalt

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2c\,dr\,dv + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) - (1 - 2M/r)\,c^2\,dv^2 \\ cv &= ct + r + 2M\ln(r/2M - 1) = ct + r^* \end{aligned} \tag{30,18}$$

hat. Diese Metrik ist natürlich nur für den Außenraum des kollabierenden Sterns zuständig, dessen Oberfläche durch

$$f(r, v) = 0 \tag{30,19}$$

gegeben sei (vgl. Abb. 23.4 und 30.1). Die Metrik im Innern könnte z. B. der Ausschnitt (23,39) eines Friedmann-Kosmos sein; wichtig ist, daß sie regulär ist und keinerlei Besonderheiten aufweist, auch während die Sternoberfläche hinter dem Horizont verschwindet.

Als Zustand des Systems wollen wir den nehmen, in dem zu keiner Zeit, insbesondere nicht für $t \to -\infty$, einlaufende Wellen vorhanden sind. Dies entspricht der Wahl der Partialwellen

$$\hat{g}_\omega = \hat{h}_\omega(r, \vartheta, \varphi)\,e^{-i\omega v} = \hat{h}_\omega(r, \vartheta, \varphi)\,e^{-i\omega(t + r^*/c)} \tag{30,20}$$

als Wellen positiver Frequenz (bezüglich $v$); d. h. wir schreiben die Lösungen der Wellengleichung $\Box\Phi = 0$ als

$$\Phi = \int_0^\infty (\hat{a}_\omega \hat{g}_\omega + \hat{a}_\omega^+ \hat{\bar{g}}_\omega)\,d\omega \tag{30,21}$$

und fordern, daß sich das System im zugeordneten Vakuumzustand $|\hat{0}\rangle$ befindet.

Wenn das Gravitationsfeld Teilchen erzeugt, müßten auslaufende Teilchen vorhanden sein, obwohl einlaufende fehlen. Auslaufende Wellen werden allerdings besser durch die Zeitkoordinate $u$ beschrieben,

$$cu = ct - r^* = cv - 2r^* = cv - 2r - 4M\ln(r/2M - 1), \tag{30,22}$$

und das zugehörige ausgezeichnete Partialwellensystem positiver Frequenz bezüglich $u$ ist

$$g_{\omega'} = h_{\omega'}(r, \vartheta, \varphi)\,e^{-i\omega' u} = h_{\omega'}(r, \vartheta, \varphi)\,e^{-i\omega'(v - 2r^*/c)}. \tag{30,23}$$

Dieses System ist allerdings (im Unterschied zu (30,20)) nicht vollständig, da es in einem allgemeinen Zustand einlaufende Wellen gibt, die dann in das sich bildende Schwarze Loch und nicht wie (30,23) in das Unendliche auslaufen. Natürlich ist es trotzdem möglich, die Funktionen $g_{\omega'}$ nach dem vollständigen System $\hat{g}_\omega$ und $\hat{\bar{g}}_\omega$ zu entwickeln,

$$g_{\omega'} = \int_0^\infty (\bar{\alpha}_{\omega\omega'} \hat{h}_\omega\,e^{-i\omega v} - \beta_{\omega\omega'} \hat{\bar{h}}_\omega\,e^{i\omega v})\,dv. \tag{30,24}$$

Auslaufende Teilchen sind genau dann vorhanden, wenn die Bogoljubow-Koeffizienten $\beta_{\omega\omega'}$ nicht verschwinden.

Die exakte Umrechnung der Funktionensysteme $g_{\omega'}$ und $\hat{g}_\omega$ ineinander ist nicht möglich, da sich insbesondere die radiale Abhängigkeit der Funktionen $h_{\omega'}$ und $\hat{h}_\omega$ nicht durch einfache analytische Ausdrücke darstellen läßt. Wie häufig bei Problemen der Wellenausbreitung hilft auch hier ein Eikonalansatz weiter (vgl. hierzu auch Abschnitt 8.4.): Beide Funktionssysteme haben die Gestalt

$$\Phi = A(x^i)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}W(r,v)}, \tag{30,25}$$

wobei das Eikonal $W(r, v)$ infolge der Wellengleichung (30,4) der Eikonalgleichung

$$0 = W_{,a}W^{,a} = W_{,r}[2W_{,v} + c(1 - 2M/r)\,W_{,r}] = W_{,r}[2W_{,v} + cW_{,r^*}] \tag{30,26}$$

genügt. Die Lösungen dieser Gleichung zerfallen offensichtlich in zwei Klassen: Einlaufende Wellen haben $W = W(v)$, auslaufende $W = W(v - 2r^*/c) = W(u)$.

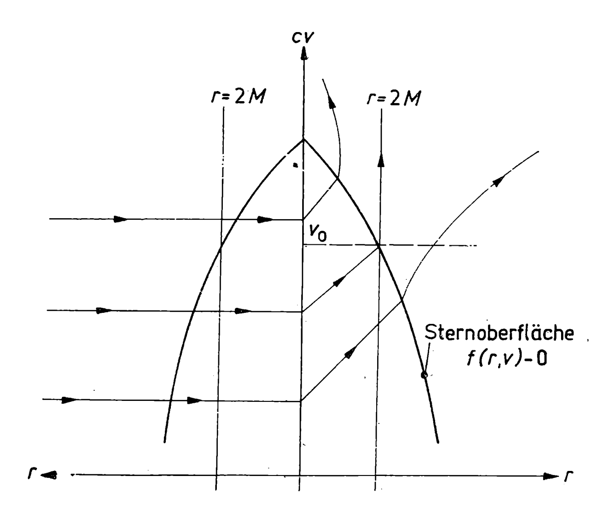



Abb. 30.1
Kollabierender Stern und Lichtstrahlen in Eddington-Finkelstein-Koordinaten

Die Näherung, die wir jetzt durchführen, besteht darin, nur die Eikonalfunktion $W$ der auslaufenden Welle auf die der einlaufenden umzurechnen, die Faktoren $\hat{h}_{\omega'}$ und $h_\omega$ also nicht zu beachten, und auch dann nur diejenigen Terme des Eikonals mitzunehmen, deren Ableitung besonders groß ist (bei einem Eikonalansatz (30,25) wird ja immer vorausgesetzt, daß die Ableitungen von $W$ groß gegenüber denen von $A$ sind).

Wie geschieht nun die Umrechnung des Eikonals

$$W = \omega' u = \omega' \left[v - \frac{2r}{c} - \frac{4M}{c}\ln(r/2M - 1)\right] \tag{30,26}$$

der auslaufenden Welle (30,23), d. h. die Bestimmung des Eikonals $\hat{W} = \hat{W}(v)$ der zugehörigen einfallenden Welle? Da $\hat{W}$ von $r$ gar nicht abhängt, reicht es offensichtlich aus, $\hat{W}$ auf der Sternoberfläche zu kennen. Um aus den Werten $W$ des Eikonals der auslaufenden Welle die der einlaufenden auf der Sternoberfläche zu erhalten, müssen wir die auslaufenden Wellen rückwärts bis zur Sternoberfläche verfolgen, dann in den Stern hinein bis zum Zentrum und wieder hinaus bis zur Sternoberfläche und die dabei jeweils auftretenden Phasenänderungen addieren. Obwohl wir das Eikonal bzw. die Phasenänderung der Wellen im Sterninnern gar nicht kennen, können wir die gewünschten Werte zumindest näherungsweise berechnen.

Wenn die Sternoberfläche ruht oder fast ruht (also z. B. am Beginn des Kollaps für $t \to -\infty$), sind Hin- und Rückweg im Sterninnern gleich und insbesondere unabhängig von $v$. Das Eikonal $\hat{W}(v)$ stimmt also auf der Sternoberfläche bis auf eine additive Konstante mit $W(u)$ überein:

$$\begin{aligned}\hat{W}(v) &= W(u)|_{r=r_0} + \text{const} = W(v, r)|_{r=r_0} + \text{const} \\ &= \omega'[v - 2r^*(r_0)/c] + \text{const} = \omega' v + \text{const}.\end{aligned} \tag{30,27}$$

Da konstante Beiträge zum Eikonal unwesentlich sind und zur Amplitude $A$ geschlagen werden können (vgl. 30,25), ist einer auslaufenden Welle $e^{-iW} = e^{-i\omega' u}$ eine einlaufende Welle $e^{-i\hat{W}} = e^{-i\omega' v}$ gleicher Frequenz zugeordnet: Wenn keine einlaufenden Wellen vorhanden sind, gibt es auch keine auslaufenden, Teilchen werden nicht erzeugt.

Wenn sich die Sternoberfläche bewegt und insbesondere wenn sie sich dem Horizont $r = 2M$ nähert, sind Hin- und Rückweg im Sterninnern nicht mehr gleich, das Eikonal $\hat{W}(v)$ auf der Sternoberfläche (und damit für alle Werte von $v$) unterscheidet sich von $W(u)$ auf der Sternoberfläche $f(r, v) = 0$ um eine additive, von $v$ abhängige Funktion $F(v)$,

$$\hat{W}(v) = W(u)|_{f(r,v)=0} + F(v). \tag{30,28}$$

In der Nähe des Horizontes hat die Gleichung $f(r, v) = 0$ der Sternoberfläche näherungsweise die Gestalt

$$r = 2M + Bc(v_0 - v) + \dots, \qquad B = \text{const}, \qquad v < v_0. \tag{30,29}$$

Es gilt also wegen (30,27) und (30,29)

$$W(u)|_{f=0} = \omega' \left[ v - \frac{4M}{c} - 2B(v_0 - v) - \frac{4M}{c} \ln \frac{Bc(v_0 - v)}{2M} + \dots \right]. \tag{30,30}$$

Wenn wir nur an dem Teil von $\hat{W}(v)$ interessiert sind, der bei $v = v_0$ dominiert, brauchen wir in (30,30) nur den ln-Term zu berücksichtigen und können in (30,28) auch die Funktion $F(v)$ weglassen, die wegen der Regularität der Metrik im Sterninneren bei $v = v_0$ eine endliche Ableitung besitzt. Es gilt somit für kleine positive $v_0 - v$

$$\hat{W}(v) \approx -\omega' \frac{4M}{c} \ln(v_0 - v). \tag{30,31}$$

Auslaufende Wellen mit $v > v_0$ können nicht von einlaufenden Wellen erzeugt werden, da diese die Sternoberfläche hinter dem Horizont $r = 2M$ verlassen müßten, dann aber den Horizont nicht durchdringen können.

Fassen wir zusammen: Die auslaufende Partialwelle (30,23) hat folgende Darstellung durch einlaufende Wellen:

$$
\begin{aligned}
g_{\omega'} &= 0 && \text{für } v > v_0 \\
g_{\omega'} &\sim e^{+i\omega' \frac{4M}{c} \ln(v_0 - v)} && \text{für } \frac{c(v_0 - v)}{2M} \ll 1 \\
g_{\omega'} &\sim e^{-i\omega v} && \text{für } v \to -\infty .
\end{aligned}
\tag{30,32}
$$

Da die Fourier-Transformierte der mittleren Zeile auf $\Gamma\left(1 - \frac{i\omega 4M}{c}\right)$ führt, sind in $g_{\omega'}$ *alle* Frequenzen $\omega$ enthalten (nicht nur die positiven): Es werden Teilchen erzeugt! Das gleiche Ergebnis (30,32) hätten wir übrigens erhalten, wenn statt eines kollabierenden Sterns eine (schrumpfende) spiegelnde Kugelfläche vorhanden gewesen wäre. Die wesentliche Bedingung wäre auch dann gewesen, daß auf der Spiegelfläche die Phase (das Eikonal) der einfallenden mit der der auslaufenden Welle übereinstimmen muß.

Wesentlicher Parameter für die Teilchenerzeugung und das Frequenzspektrum ist die Größe $4M/c$. Wie eine genauere Analyse zeigt (Hawking 1975), haben die Teilchen ein thermisches Spektrum, d. h. ein Schwarzes Loch der (Newtonschen) Masse $m$ strahlt wie ein Schwarzer Körper der Temperatur

$$T = \frac{\hbar c}{8\pi M k} = \frac{\hbar}{k m \varkappa c^2} \approx \frac{1{,}2 \cdot 10^{26}\,\mathrm{K}}{m[\mathrm{g}]} \tag{30,33}$$

(im zweiten Teil der Gleichung ist die Masse in Gramm einzusetzen, um die Temperatur in Kelvin zu erhalten). Schwarze Löcher sind also gar nicht schwarz, sondern senden ständig Strahlung aus; sie sind um so heißer, je kleiner (massëärmer) sie sind.

Schon ehe diese überraschende Beziehung zwischen Thermodynamik, Quantentheorie und Gravitation von Hawking gefunden wurde, hatte Bekenstein (1973) vermutet, daß einem Schwarzen Loch Temperatur und Entropie zugeordnet werden können: Ähnlich wie die Entropie aller an einem Prozeß beteiligten thermodynamischen Systeme nie abnehmen kann, kann auch die Summe aller Oberflächen $A_i$ eines Systems (rotierender oder nichtrotierender) Schwarzer Löcher nicht abnehmen (vgl. Abschnitt 24.3.). In der Tat lassen sich die Hawkingschen Überlegungen auf rotierende Schwarze Löcher ausdehnen, und für Temperatur $T$ und Entropie $S$ gilt

$$T = \frac{2(r_+ - M)\,\hbar c}{A k}, \qquad S = \frac{2\pi k}{\varkappa c \hbar} A . \tag{30,34}$$

Der zweite Hauptsatz lautet für kugelsymmetrische Schwarze Löcher

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}(8\pi M/\varkappa) = \mathrm{d}mc^2 . \tag{30,35}$$

Kehren wir noch einmal zurück zur Ableitung und Diskussion der Teilchenerzeugung im Gravitationsfeld eines kugelsymmetrischen kollabierenden Sterns. Die oben angedeutete Ableitung des Effektes mag den Eindruck recht willkürlicher Näherungsannahmen erwecken. Es ist aber so, daß die zentrale Gleichung (30,31) alle wesentlichen Details liefert, da die auslaufenden Wellen (Teilchen), die ein entfernter Beobachter zu späten Zeiten sieht, alle aus der Nähe des Horizontes kommen. Man sieht

auch sofort, daß sich die Grundidee sehr einfach auf andere masselose Felder (z. B. das Maxwell-Feld) übertragen läßt, da die Eikonalgleichung (30,26) für alle diese Felder gleich ist. Es läßt sich zeigen, daß auch Teilchen mit Ruhemasse erzeugt werden.

Wo entstehen nun alle diese Teilchen? Die analytische Struktur des Eikonals legt nahe, die Erzeugung in der unmittelbaren Nachbarschaft des Horizontes zu lokalisieren; der globale Charakter des Teilchenbegriffs der Quantenfeldtheorie läßt allerdings Vorsicht bei allzu anschaulichen Interpretationen ratsam erscheinen.

Wenn ein kollabierender Stern ständig Teilchen abstrahlt, kann dies natürlich nur auf Kosten seiner Energie (Masse) geschehen. Da allerdings ein Schwarzes Loch von z. B. einer Sonnenmasse nur eine Temperatur von $T = 6 \cdot 10^{-8}$ K hat, ist dieser Massenverlust für übliche kollabierende Himmelskörper vernachlässigbar. Schwarze Löcher sehr kleiner Masse müßten allerdings recht kurzlebig sein: Durch den Energieverlust steigt die Temperatur schnell an, es wird mehr abgestrahlt, in einem sich selbst beschleunigenden Prozeß verschwindet das Schwarze Loch.

Um zu entscheiden, ob diese Vorstellungen richtig sind, braucht man eine Theorie, die die Rückwirkung des Quantenfeldes auf das Gravitationsfeld richtig beschreibt — und die gibt es noch nicht. So ist noch nicht einmal klar, ob sich bei einem Gravitationskollaps immer ein Schwarzes Loch bilden muß oder ob die Teilchenerzeugung (die ja schon einsetzt, ehe der Stern hinter dem Horizont verschwindet) die Masse so schnell vermindert und damit den Horizont $r = 2M$ so schnell nach innen treibt, daß die Sternoberfläche ständig außerhalb des Horizontes bleibt. Es spricht mehr dafür, daß ein Horizont entsteht, aber davon, wie er wieder verschwinden kann, haben wir noch keine detaillierte Vorstellung und Theorie.

*Literatur zu Kapitel 30.:*

[31], [41], [44], [52], [75], [82], [100], [101], [116], [139], [142], [143], [144], [150], [163], [192].

# Literaturverzeichnis

## Lehrbücher

[1] ANDERSON, J. L.: Principles of Relativity Physics. — New York: Academic Press 1967.
[2] BERGMANN, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1958.
[3] EDDINGTON, A. S.: Relativitätstheorie in Mathematischer Behandlung. — Berlin: Springer-Verlag 1925.
[4] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. — Berlin: Akademie-Verlag 1979.
[5] EINSTEIN, A.: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. — Berlin: Akademie-Verlag 1979.
[6] EISENHART, L. Pf.: Continuous Groups of Transformations. — Princeton: Princeton University Press 1933.
[7] EISENHART, L. Pf.: Riemannian Geometry. — Princeton: Princeton University Press 1923.
[8] FOCK, V.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. — Berlin: Akademie-Verlag 1960.
[9] LANDAU, L. D.; LIFSCHITZ, E. M.: Klassische Feldtheorie. — Berlin: Akademie-Verlag 1984.
[10] v. LAUE, M.: Die Relativitätstheorie. — Braunschweig: Friedr. Vieweg 1956.
[11] LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. — Paris: Masson et Cie. 1955.
[12] MISNER, CH. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A.: Gravitation. — San Francisco: W. H. Freeman & Co. 1973.
[13] MØLLER, C.: The Theory of Relativity. — Oxford: Clarendon Press 1972.
[14] RINDLER, W.: Essential Relativity. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1980.
[15] SCHMUTZER, E.: Relativistische Physik, — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1968.
[16] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus. — Berlin—Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1954.
[17] STRAUMANN, N.: General Relativity and Relativistic Astrophysics. — Berlin—Heidelberg —New York—Tokyo: Springer-Verlag 1984.
[18] SYNGE, J. L.: Relativity — The Special Theory. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1956.
[19] SYNGE, J. L.: Relativity — The General Theory. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1960.
[20] WEINBERG, S.: Gravitation and Cosmology. — New York: John Wiley & Sons. 1972.
[21] WEYL, H.: Raum-Zeit-Materie. — Berlin: Springer-Verlag 1920.

## Monographien und Sammelbände

[30] BERTOTTI, B.; DE FELICE, F.; PASCOLINI, A. (Hrsg.): General Relativity and Gravitation — Dortrecht: D. Reidel, 1984.
[31] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W.: Quantum Fields in Curved Space. — Cambridge: Cambridge University Press 1984.
[32] BREUER, R. A.: Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation. Lecture Notes in Physics 44. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1975.
[33] CARMELI, M.; FICKLER, S. J.; WITTEN, L. (Hrsg.): Relativity. — New York: Plenum Press 1970.
[34] CHANDRASEKHAR, S.: The Mathematical Theory of Black Holes. — Oxford: Clarendon Press 1983.
[35] CHIU, H.-Y.; HOFFMANN, W. F. (Hrsg.): Gravitation and Relativity. — New York: W. A. Benjamin, Inc. 1964.
[36] CLARKE, R. W.: Albert Einstein. — Eßlingen: Bechtle-Verlag 1974.
[37] DAUTCOURT, G.: Relativistische Astrophysik. Wissenschaftliche Taschenbücher Bd. 56. — Berlin: Akademie-Verlag 1976.
[38] DE WITT, C. und B. (Hrsg.): Relativity, Groups and Topology. Les Houches 1963. — New York: Gordon & Breach 1964.
[39] DE WITT, C. und B. (Hrsg.): Black Holes. Les Houches 1972. — New York: Gordon & Breach 1973.
[40] DE WITT, C. (Hrsg.): Gravitational Radiation and Gravitational Collaps. (IAU Warschau 1973). — Dordrecht: D. Reidel Co., 1974.
[41] DE WITT, B. S.; GRAHAM, N. (Hrsg.): The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics. — Princeton: Princeton University Press 1973.
[42] DE WITT, C. M.; WHEELER, J. A. (Hrsg.): Batelle Rencontres. 1967 Lectures in Mathematics and Physics. — New York: W. A. Benjamin, Inc. 1968.
[43] FARNSWORTH, D. u. a. (Hrsg.): Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity. Lecture Notes in Physics 14. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1972.
[44] GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W.; SIKLOS, S. T. (Hrsg.): The Very Early Universe. — Cambridge: Cambridge University Press 1983.
[45] GOLDBERG, L. u. a. (Hrsg.): Annual Review of Astronomy and Astrophysics **11** (1973). Annual Review Inc., Palo Alto/Cal.
[46] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R.: The Large Scale Structure of Space-Time. — Cambridge. Cambridge University Press 1973.
[47] HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Hrsg.): General Relativity — An Einstein Centenary Survey. — Cambridge: Cambridge University Press 1979.
[48] HELD, A. (Hrsg.): General Relativity and Gravitation. Vol. 1 und 2. — New York/London: Plenum Press 1980.
[49] HLAVATÝ, V.: Geometry of Einstein's Unified Field Theory. — Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1957.
[50] HOFFMANN, B. (Hrsg.): Perspectives in Geometry and Relativity. — Bloomington: Indiana University Press 1966.
[51] INFELD, L. (Hrsg.): Relativistic Theories of Gravitation. — Oxford: Pergamon Press 1964.
[52] ISHAM, C. J.; PENROSE, R.; SCIAMA, D. W. (Hrsg.): Quantum Gravity 1, 2. — Oxford: Clarendon Press 1975/1981.
[53] JORDAN, P.: Schwerkraft und Weltall. — Braunschweig: Friedr. Vieweg 1955.
[54] JORDAN, P.: Die Expansion der Erde. — Braunschweig: Friedr. Vieweg 1966.
[55] KLAUDER, J. R. (Hrsg.): Magic Without Magic. John Archibald Wheeler. — San Francisco: Freeman 1972.

[56] KRAMER, D.; STEPHANI, H.; MACCALLUM, M.; HERLT, E.: Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Berlin/Cambridge: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften/ Cambridge University Press 1980.
[57] KUNDT, W.: Survey of Cosmology. Springer Tracts in Modern Physics Vol. 58. — Berlin/ Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1971.
[58] LONGAIR, M. S. (Hrsg.): Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data (IAU Krakau 1973). — Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1974.
[59] LUDWIG, G.: Fortschritte der Projektiven Relativitätstheorie. Sammlung „Die Wissenschaft" Bd. 105. — Braunschweig: Friedr. Vieweg 1951.
[60] NEUGEBAUER, G.: Relativistische Thermodynamik. — Berlin: Akademie-Verlag 1980.
[61] O'RAIFEARTAIGH, L. (Hrsg.): General Relativity. — Oxford: Clarendon Press 1972.
[62] PEEBLES, P. J. E.: Physical Cosmology. — Princeton: Princeton University Press 1971.
[63] PENROSE, R.; RINDLER, W.: Spinors and Space-time. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
[64] PETROW, A. S.: Einstein-Räume. — Berlin: Akademie-Verlag 1964.
[65] RYAN, M. P.; SHEPLEY, L. C.: Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton/ New Jersey: Princeton University Press 1975.
[66] SACHS, R. K. (Hrsg.): General Relativity and Cosmology. — New York: Academic Press 1971.
[67] SCHMUTZER, E. (Hrsg.): Proceedings of the 9th International Conference on General Relativity and Gravitation. — Berlin/Cambridge: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften/Cambridge University Press 1983.
[68] SCIAMA, D. W.: Modern Cosmology. — Cambridge: Cambridge University Press 1971.
[69] SMARR, L. (Hrsg.): Sources of Gravitational Radiation. — Cambridge: Cambridge University Press 1979.
[70] STEWART, J.; WALKER, M.: Black Holes: The Outside Story. (Ergeb. Exakt. Naturwiss. Bd. 69). — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1973.
[71] TOLMAN, R. C.: Relativity, Thermodynamics and Cosmology. — Oxford: Clarendon Press 1934.
[72] TRAUTMAN, A.; PIRANI, F. A. E.; BONDI, H.: Lectures on General Relativity (Brandeis Summer Institute 1964). — London: Prentice Hall 1965.
[73] TREDER, H. J.: Gravitative Stoßwellen — Nichtanalytische Wellenlösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. — Berlin: Akademie-Verlag 1962.
[74] WEINBERG, S.: The First Three Minutes. — London: Fontana/Collins 1977
[75] WHEELER, J. A.: Einsteins Vision. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1968.
[76] WITTEN, L. (Hrsg.): Gravitation. — New York: John Wiley & Sons 1962.
[77] YANO, K.: The Theory of Lie Derivatives and its Applications. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1955.
[78] ZAKHAROV, V. D.: Gravitational Waves in Einstein's Theory. — New York/Moskau: John Wiley & Sons/Nauka 1973/1972.
[79] ZELDOVICH, YA. B.; NOVIKOV, I. D.: Relativistic Astrophysics. — Chicago/London: The University of Chicago Press 1971.
[80] Symposia Mathematica Vol. XII. — London/New York: Academic Press 1973.
[81] International Conference on Relativistic Theories of Gravitation. — London: 1965.
[82] HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Hrsg.): Threehundred years of gravitation. — Cambridge: Cambridge University Press 1987.

## Übersichts- und Zeitschriftenartikel

[100] ASHTEKAR, A.; GEROCH, R.: Quantum theory of gravitation. Rep. Progr. Phys. (GB) **37** (1974) 1211.
[101] BEKENSTEIN, J. D.: Black Holes and entropy. Phys. Rev. **D 7** (1973) 2333—2346.
[102] BLANDFORD, R. D.; THORNE, K. S.: Black Hole astrophysics. In [47].

[103] BONDI, H. u. a.: Waves from axi-symmetric isolated systems. Proc. Roy. Soc. **A 269** (1962) 21.
[104] BONNOR, W. B.: Multipole fields in linearized general relativity. In [50].
[105] BRAGINSKI, B. G.; MANUKIN, A. B.: Die Messung kleiner Kräfte in physikalischen Experimenten — Moskau: Nauka 1974 (russ.).
[106] BRAGINSKI, V. B.; THORNE, K. S.: Present State of Gravitational Wave Experiments. In [67].
[107] BRANS, C.; DICKE, R. H.: Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. Phys. Rev. **124** (1961) 925.
[108] BRUHAT, Y.: The Cauchy problem. In [76].
[109] CAMPBELL, W. B.: The linear theory of gravitation in the radiation gauge. Gen. Rel. Grav. **4** (1973) 137.
[110] CARTAN, E.: Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. C. R. Acad. Sci. (Paris) **174** (1922) 593.
[111] CARTER, B.: The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes. In [47].
[112] CHOQUET-BRUHAT, Y.; YORK, J. W.: The Cauchy Problem. In [48].
[113] DARWIN, C.: The gravity field of a particle. Proc. Roy. Soc. **249** (1959) 181.
[114] DAUTCOURT, G.: Zum charakteristischen Anfangswertproblem der Einsteinschen Feldgleichungen. Ann. Physik **12** (1963) 301.
[115] DE SITTER, W.: On the curvature of space. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20** (1917) 229.
[116] DE WITT, B.: Quantum Gravity: the new synthesis. In [47].
[117] DE WITT, B.; BREHME, R.: Radiation damping in a gravitational field. Ann. Phys. **9** (1960) 220.
[118] DOUGLAS, D. H.; BRAGINSKI, V. B.: Gravitational-radiation experiments. In [47].
[119] DREVER, R. W. P.: Laser interferometer gravitational wave detectors. In [30].
[120] DUFF, M. J.: On the significance of periphelion shift calculations. Gen. Rel. Grav. **5** (1974) 441.
[121] EDDINGTON, A. S.: A comparison of Whitehead's and Einstein's formulae. Nature **113** (1924) 192.
[122] EHLERS, J.: General relativity and kinetic theory. In [66].
[123] EHLERS, J.: Generalized electromagnetic null fields and geometrical optics. In [50].
[124] EHLERS, J.: Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien. Abh. Mainzer Akad. Wiss. Math.-Nat. Klasse 1961 Nr. 11.
[125] EHLERS, J.; KUNDT, W.: Exact solutions of the gravitational field equations. In [76].
[126] EHLERS, J.; ROSENBLUM, A.; GOLDBERG, J.; HAVAS, P.: Comments on gravitational radiation damping and energy loss in binary systems. Astrophys. J. **208** (1976) 77.
[127] EINSTEIN, A.: Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 142 (1917).
[128] EINSTEIN, A.; STRAUSS, E. G.: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. Rev. mod. Phys. **17** (1945) 120.
[129] ELLIS, G. F. R.: Relativistic cosmology. In [66].
[130] ELLIS, G. F. R.; KING, A. R.: Was the big bang a whimper? Commun. math. Phys. **38** (1974) 119.
[131] ELLIS, G. F. R.; SCIAMA, D. W.: Global and nonglobal problems in cosmology. In [61].
[132] ELLIS, G. F. R.; SCIAMA, D. W.: On a class of model universes satisfying the perfect cosmological principle. In [50].
[133] FINKELSTEIN, D.: Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. Phys. Rev. **110** (1958) 965.
[134] FISCHER, A. E.; MARSDEN, J. E.: The initial problem and the dynamical formulation of general relativity. In: [47].
[135] FRIEDMANN, A.: Über die Krümmung des Raumes. Z. Phys. **10** (1922) 377.
[136] GAMOW, G.: The evolution of the universe. Nature **162** (1948) 680.
[137] GEROCH, R.: Space-time structure from a global viewpoint. In [66].

[138] GEROCH, R.: Asymptotic structure of space-time. In: ESPOSITO, F. P.; WITTEN, L.: Asymptotic Structure of Space-time. — New York: Plenum 1979.
[139] GIBBONS, G. W.: Quantum field theory in curved spacetime. In [47].
[140] GÖDEL, K.: An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. Rev. mod. Phys. **21** (1949) 447.
[141] GREENBERG, PH. J.: The general theory of space-like congruences with an application to vorticity in relativistic hydrodynamics. J. math. Anal. Appl. **30** (1970) 128.
[142] HAWKING, S. W.: Particle creation by Black Holes. Commun. math. Phys. **43** (1975) 199.
[143] HAWKING, S. W.: Breakdown of predictability in gravitational collapse. Phys. Rev. **D14** (1976) 2460.
[144] HAWKING, S. W.: The path-integral approach to quantum gravity. In [47].
[145] HEHL, F. W.: Spin and Torsion in General Relativity I, II. GRG **4** (1973) 333; **5** (1974) 491.
[146] HELLINGS, R. W.: Testing relativity with solar system dynamics. In [30].
[147] HERLT, E.; STEPHANI, H.: Wave optics of the spherical gravitational lens. Internat. J. Theor. Phys. **15** (1976) 45.
[148] HILBERT, D.: Die Grundlagen der Physik. Nachr. König. Gesellsch. Wiss., Göttingen 395 (1915).
[149] ISRAEL, W.: The relativistic Boltzmann equation. In [61].
[150] ISRAEL, W.: General Relativity: progress, problems, and prospects. Canad. J. Phys. **63** (1985) 34—43.
[151] ISRAEL, W.; STEWART, J. M.: Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continuous media. In [48].
[152] JORDAN, P.; EHLERS, J.; SACHS, R.: Beiträge zur Theorie der reinen Gravitationsstrahlung. Abh. Mainzer Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse 1961 Nr. 1.
[153] JORDAN, P.; EHLERS, J.; KUNDT, W.: Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Abh. Mainzer Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse 1960 Nr. 2.
[154] JORDAN, P.; EHLERS, J.; KUNDT, W.; SACHS, R.; TRÜMPER, M.: Beiträge zur Theorie der Gravitations-Strahlungsfelder. Abh. Mainzer Akad. Wiss., Math-Nat. Klasse 1962 Nr. 12.
[155] JORDAN, P.; KUNDT, W.: Geometrodynamik im Nullfall. Abh. Mainzer Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse 1961 Nr. 3.
[156] KALUZA, T.: Zum Unitätsproblem der Physik. Sitz. — Ber. Preuß. Akad. Wiss. 966 (1921).
[157] KERR, R. P.: Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. Phys. Rev. Letters. **11** (1963) 237.
[158] KILLING, W.: Über die Grundlagen der Geometrie. J. Reine und Angew. Math. **109** (1882) 121.
[159] KINNERSLEY, W.: Recent Progress in Exact Solutions. In: Conference on Gravitation and General Relativity.-Tel Aviv 1974; Chichester: Wiley 1975.
[160] KLEIN, O.: Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Z. Phys. **37** (1926) 895.
[161] KOMAR, A.: Covariant conservation laws in general relativity. Phys. Rev. **113** (1959) 934.
[162] KRAMER, D.: Schwarzschildfeld im Friedmankosmos. Wiss. Z. FSU Jena, Math.-Nat. Reihe **1** (1969) 155.
[163] KUCHAR, K.: Canonical Quantization of Gravity. In: W. Israel (Hrsg.): Relativity, Astrophysics, and Cosmology. — Dordrecht: D. Reidel 1973.
[164] KUNDT, W.: The plane-fronted gravitational waves. Z. Phys. **163** (1961) 78.
[165] KUNDT, W.: Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell. Z. Phys. **145** (1956) 611.
[166] LEMAITRE, G.: Condensations sphériques dans l'universe en expansion. C. R. Acad. Sci. (Paris) **196** (1933) 903.
[167] LIANG, E. P. T.; SACHS, R. K.: Cosmology. In [48].
[168] MACCALLUM, M. A. H.: Anisotropic and inhomogeneous relativistic cosmologies. In [47].

]169] MEHRA, J.: Origins of the modern theory of gravitation — the historical origins of the theory of relativity from 1907 to 1919. Bull. Soc. Res. Sci. Liége (Belgien) **43** (1974) 190.

[170] MILLER, J. C.; SCIAMA, D. W.: Gravitational collaps to the Black Hole state. In [48].

[171] NEUGEBAUER, G.: Einsteinsche Feldgleichungen und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik. Nova Acta Leopoldina Bd. 39, Nr. 212 (1974).

[172] NEWMAN, E. T.; PENROSE, R.: An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J. Math. Phys. **3** (1962) 566.

[173] NEWMAN, E. P.; TODD, K. P.: Asymptotically flat space-times. In [48].

[174] O'BRIEN, S.; SYNGE, J. L.: Jump conditions at discontinuities in General Relativity. Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. A, Nr. 9 (1952).

[175] O'CONNELL, R. F.: Present status of the theory of the relativity-gyroscope experiment. GRG **3** (1972) 123.

[176] PENROSE, R.: Structure of space-time. In [42].

[177] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W.: A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mcls. Astrophys. J. **142** (1965) 419.

[178] PLEBANSKI, J.; MIELNIK, B.: A study of geodesic motion in the field of Schwarzschild's solution. Acta Phys. Polon. XXI (1962) 239.

[179] POUND, R. W.; REBKA, G. A.: Apparent weight of photons. Phys. Rev. Letters **4** (1960) 337.

[180] REASENBERG, R. D.: Present state of the experimental verification of the four-dimensional General Theory of Relativity. In: V. DE SABBATA, E. SCHMUTZER (Hrsg.): Unified Field Theories of more than 4 Dimensions. — World Scientific Singapore: 1983.

[181] REISSNER, H.: Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. Ann. Phys. **50** (1916) 106.

[182] ROBERTSON, H. P.: Kinematics and world structure. Astrophys. J. **83** (1936) 187.

[183] ROBINSON, I.; TRAUTMAN, A.: Some spherical gravitational waves in general relativity. Proc. Roy. Soc. **A265** (1962) 463.

[184] SACHS, R. K.: Gravitational radiation. In [38].

[185] SACHS, R. K.: Waves in asymptotically flat space-time. Proc. Roy. Soc. **A 270** (1962) 103.

[186] SANDAGE, A.; TAMMANN, G. A.: Steps toward the Hubble constant. I Astrophys. J. **190** (1974) 525; II Astrophys. J. **191** (1974) 603; III Astrophys. J. **194** (1974) 223; IV Astrophys. J. **195** (1975) 559; V Astrophys. J. **196** (1975) 313; VI Astrophys. J. **197** (1975) 265.

[187] SCHIMMING, R.: Zur Geschichte der ebenen Gravitationswellen. NTM-Schriftenreihe Gesch. Naturwiss. Technik u. Med., Leipzig **10** (1973) 21.

[188] SCHRÖDINGER, E.: Maxwell's and Dirac's equations in the expanding universe. Proc. Roy. Irish Acad. **46 A** (1940) 25.

[189] SCHÜCKING, E.: Das Schwarzschildsche Linienelement und die Expansion des Weltalls. Z. Phys. **137** (1954) 595.

[190] SCHWARZSCHILD, K.: Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 189 (1916).

[191] SCHWARZSCHILD, K.: Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 424 (1916).

[192] SCIAMA, D. W.; CANDELA, P.; DEUTSCH, D.: Quantum field theory, horizons and thermodynamics. Adv. Phys. **30** (1981) 327—66.

[193] SHAPIRO, I. I.: Experimental tests of the general theory of relativity. In [48].

[194] STEPHANI, H.: Physik in geschlossenen Kosmen. Nova Acta Leopoldina Bd. 39, Nr. 212 (1974).

[195] STEPHANI, H.: Näherungsverfahren zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Wiss. Z. FSU Jena **15** (1966) Heft 1, 91.

[196] TAUB, A. H.: The motion of multipoles in General Relativity. In: Atti del convegno sulla relativitá generale: Problemi dell' energia e onde gravitazionale. — Firenze: G. Barbera 1965.

[197] Thirring, H.; Lense, H.: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. Phys. Z. **19** (1918) 156.
[198] Thorne, K. S.; Will, C. M.: Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. Astrophys. J. **163** (1971) 595, **611**; **169** (1971) 125.
[199] Tipler, F. J.; Clarke, C. J. S.; Ellis, C. F. R.: Singularities and horizons — a review article. In [48].
[200] Trautman, A.: Conservation laws in general relativity. In [76].
[201] Walker, A. G.: On Milne's theory of world structure. Proc. London Math. Soc. **42** (1936) 90.
[202] Weber, J.: The search for gravitational radiation. In [48].
[203] Wesson, P. S.: Expanding Clusters of Galaxies as components of a relativistic hierarchical cosmology. Astrophysics and Space Science **30** (1974) 95.
[204] Westpfahl, K.: Relativistische Bewegungsprobleme. Ann. Physik **20** (1967) 113.
[205] Weyl, H.: Zur Gravitationstheorie. Ann. Phys. **54** (1917) 117.
[206] Weyl, H.: Gravitation und Elektrizität. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 465 (1918).
[207] Will, C. M.: The confrontation between gravitation theory and experiment. In [47].
[208] Zeldovich, Ya. B.: Cosmology and the early universe. In [47].
[209] Nobili, A. M.; Will, C. M.: The real value of Mercury's perihelion advence, Nature **320** (1986) 39.

# Sachverzeichnis

# Bezeichnungen, Konventionen und wichtige Formeln

Minkowski-Raum: $\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$.

Riemannscher Raum: $\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$.

$$g = |g_{ab}|, \qquad g^{ab}g_{bm} = \delta^a_m = g^a_m.$$

$\varepsilon$-Pseudotensor: $\varepsilon^{abmn}$; $\quad \varepsilon^{1234} = 1/\sqrt{-g}$.

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{abnm} = -2(g^n_c g^m_d - g^m_c g^n_d).$$

Dualisierung eines antisymmetrischen Tensors: $\tilde{F}^{ab} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{abmn}F_{mn}$.

Christoffel-Symbole: $\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}\,g^{ab}(g_{bm,n} + g_{bn,m} - g_{mn,b})$.

Kovariante Ableitung: $\mathrm{D}T^a/\mathrm{D}x^m = T^a{}_{;m} = T^a{}_{,m} + \Gamma^a_{mn}T^n$,

$$\mathrm{D}T_a/\mathrm{D}x^m = T_{a;m} = T_{a,m} - \Gamma^n_{am}T_n.$$

Geodätengleichung: $\dfrac{\mathrm{D}^2x^i}{\mathrm{D}\lambda^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^i_{nm}\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\dfrac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} = 0$.

Paralleltransport längs der Kurve $x^i(\lambda)$: $\mathrm{D}T^a/\mathrm{D}\lambda = T^a{}_{;b}\,\mathrm{d}x^b/\mathrm{d}\lambda = 0$.

Fermi-Walker-Transport: $\dfrac{\mathrm{D}T^n}{\mathrm{D}\tau} - \dfrac{1}{c^2}\,T_a\left(\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau}\dfrac{\mathrm{D}^2x^a}{\mathrm{D}\tau^2} - \dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau}\dfrac{\mathrm{D}^2x^n}{\mathrm{D}\tau^2}\right) = 0$.

Lie-Ableitung in Richtung des Vektorfeldes $a^k(x^i)$:

$$\underset{a}{\pounds}T^n = T^n{}_{,k}a^k - T^k a^n{}_{,k} = T^n{}_{;k}a^k - T^k a^n{}_{;k}.$$

$$\underset{a}{\pounds}T_n = T_{n,k}a^k + T_k a^k{}_{,n} = T_{n;k}a^k + T_k a^k{}_{;n}.$$

Killing-Gleichung: $\xi_{i;n} + \xi_{n;i} = \underset{\xi}{\pounds}g_{in} = 0$.

Divergenz eines Vektorfeldes: $a^i{}_{;i} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,a^i\right)_{,i}$.

Maxwell-Gleichungen: $F^{mn}{}_{;n} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,F^{mn}\right)_{,n} = \dfrac{1}{c}\,j^m$,

$$\tilde{F}^{mn}{}_{;n} = 0.$$

Krümmungstensor: $a_{m;s;q} - a_{m;q;s} = a_b R^b{}_{msq}$,

$$R^b{}_{msq} = \Gamma^b_{mq,s} - \Gamma^b_{ms,q} + \Gamma^b_{ns}\Gamma^n_{mq} - \Gamma^b_{nq}\Gamma^n_{ms},$$

$$R_{amsq} = \tfrac{1}{2}(g_{aq,ms} + g_{ms,aq} - g_{as,mq} - g_{mq,as} + \text{nichtlineare Terme}.$$

Ricci-Tensor: $R_{mq} = R^s{}_{msq} = -R^s{}_{mqs}$; $\quad R^m{}_m = R$.

Feldgleichungen: $G_{ab} = R_{ab} - \dfrac{R}{2}\, g_{ab} = \varkappa T_{ab}$.

Ideale Flüssigkeit: $T_{ab} = (\mu + p/c^2)\, u_a u_b + p g_{ab}$.

Schwarzschild-Metrik: $ds^2 = \dfrac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - (1 - 2M/r)\, c^2\, dt^2$.

Robertson-Walker-Metrik: $ds^2 = K^2(ct)\left[\dfrac{dr^2}{1 - \varepsilon r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] - c^2\, dt^2$.

Hubble-Zahl: $H(ct) = \dot{K}/K$.

Beschleunigungsparameter: $q(ct) = -K\ddot{K}/\dot{K}^2$.

$\varkappa = 2{,}07 \cdot 10^{-48}\ \mathrm{g^{-1}\,cm^{-1}\,s^2}$, $\quad cH = 55$ km/s Mpc,

$2M_{\mathrm{Erde}} = 0{,}8876$ cm, $\quad 2M_{\mathrm{Sonne}} = 2{,}9533 \cdot 10^5$ cm.